Pressione sonora

Abbiamo precedentemente detto che affinchè il suono possa diffondersi, il mezzo attraverso cui viaggiano le onde sonore deve essere elastico. Ritornando al caso del pistone mobile, possiamo dire che, dal momento che l'aria è un mezzo elastico, la sua compressione, dovuta all'avanzata del pistone, viaggia con velocità finita e quindi, ad un determinato istante di tempo e ad una opportuna distanza dal pistone, esisterà sempre uno strato di particelle rimaste ferme che costituisce una barriera all'avanzamento delle particelle perturbate dal moto del pistone. Si ha il cosiddetto fenomeno di *confinamento inerziale* il quale fa sì che, sebbene non vi sia una parete solida, il volume del gas diminuisca e che di conseguenza aumenti la pressione. Quando il pistone torna indietro, il volume e la pressione ritornano ai loro valori originari; possiamo quindi affermare che anche la pressione segue il moto del pistone fluttuando nel tempo con legge sinusoidale.
Ricordando il significato energetico e cinetico del suono, osserviamo che al contatto con un mezzo ho il passaggio da energia cinetica (movimento delle masse) ad energia potenziale , sotto forma di pressione. In ogni istante l'energia posseduta è sempre la stessa e sarà la somma delle due.
Se considero un elemento di aria ad una distanza r (fig. 8a), ho una compressione di questo volumetto (fenomeno piuttosto rapido) e posso considerare la trasformazione di energia adiabatica e quindi varrà la legge:

$$\mathbf{PV^{g}=cost} \qquad (9)$$

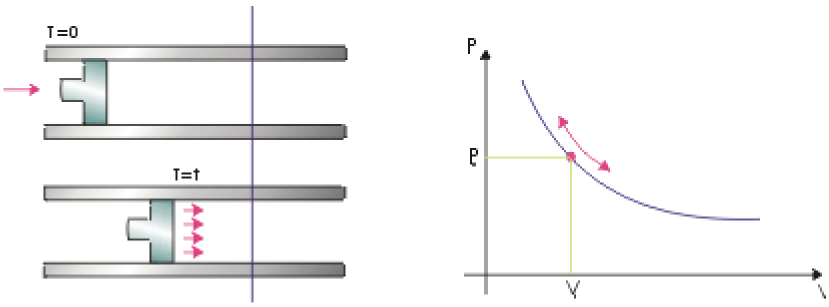


Fig.8 :compressione del pistone e relativo grafico di oscillazione

Il sistema , seguendo questa legge, oscillerà intorno al punto (P_0, V_0) , cioè intorno alla pressione atmosferica.
Chiameremo **Pressione sonora P'** la differenza tra la pressione complessiva che fluttua nel tempo **P (t)** meno il valore costante dato dalla pressione atmosferica $\mathbf{P_0}$.

$$\mathbf{P' = P(t) - P_0} \qquad (10)$$

Poiché si tratta di una grandezza relativa, cioè calcolata a partire da un valore di riferimento costante, che in questo caso è la pressione atmosferica media, può assumere anche valori negativi. Le pressioni coinvolte in campo sonoro sono sempre molto piccole. Si raggiunge una pressione di *1 Pa* quando il suono ha un livello in decibel pari a *94 dB* che è un valore superiore a quello della voce umana.Le due equazioni fondamentali che descrivono la fluttuazione di pressione sonora sono:

$$\mathbf{PV=RT} \qquad (11)$$

$$\mathbf{PV^{g}=P_0V_0^{g}} \qquad (12)$$

Da cui:

$$P\rho^{-\gamma}=P_0\rho_0^{-\gamma} \qquad (13)$$

$$P=P_0\rho_0^{-\gamma}\rho^{\gamma} \qquad (14)$$

Dunque vedo che la pressione non cresce linearmente con la densità ma cresce con una sua potenza. Posso calcolarmi la pendenza di questa curva effettuandone la derivata:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = P_0 \gamma \frac{\rho^{\gamma-1}}{\rho_0^{\ \gamma}} \qquad (15)$$

Se calcoliamo il valore locale nell'origine (15) , nell'ipotesi di piccoli spostamenti,otteniamo la pendenza della curva in quel punto,e sarà quindi possibile approssimare la curva con una retta.

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_0 = P_0 \gamma \left.\frac{\rho^{\gamma-1}}{\rho_0^{\ \gamma}}\right|_0 = P_0 \frac{\gamma}{\rho_0} \qquad (16)$$

In particolare scopriamo che questa derivata ha come dimensione quella di una velocità elevata al quadrato, infatti ricordando l'equazione di Bernoulli e che la velocità è quella del suono otteniamo:

$$\rho \frac{c^2}{2} + P + \rho gh = \cos t \qquad \Rightarrow \qquad P_0 \frac{\gamma}{\rho_0} = c^2$$

E' possibile ora esplicitare la velocità :

$$c = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}\gamma} = \sqrt{\gamma RT} \qquad (17)$$

La velocità di propagazione dipende solo dal mezzo e non dall'ampiezza e frequenza del segnale ed è invece dipendente dalla temperatura.
Questa relazione è alla base della **Termometria acustica**, e sarà possibile così misurare per esempio la temperatura in una camera di compressione misurando il tempo di propagazione nel mezzo.Nei liquidi valgono relazioni analoghe:

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}\gamma} \qquad (18)$$

dove **b** è il ***modulo di compressibilità*** isoterma e vale:

$$\beta = -V \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{T=cost} \qquad (19)$$

Questo modulo ha un valore elevato e avremo una velocità di propagazione maggiore rispetto a quella dell'aria.Nella tabella 2 sono illustrate alcune tra le velocità di propagazione riferite ai mezzi più usati:

Mezzo	Velocità del suono [m/s]
Quarzo	5486
Acciaio	6096
Azoto (a 27°C e 1 BAR)	355
Azoto (a 27°C e 100 BAR)	379
Mercurio	1451
Glicerina	1895
Idrogeno	1281
Elio	600

Tabella 1 – Valore della velocità del suono in vari mezzi

Osserviamo che l'azoto non può essere considerato un gas perfetto perché la velocità del suono varia con la pressione.
E' importante notare l'alto valore dell'acqua; oltre ad essere abbastanza elevato, l'acqua ha un bassissimo *coefficiente di perdita*: il suono infatti può percorrere in acqua anche centinaia di chilometri prima di perdere ampiezza.
Questa velocità ha anche un aspetto negativo: infatti il tempo necessario a raggiungere un orecchio è pressoché uguale a quello necessario a raggiungere l'altro.Questo non ci permette, in acqua, di localizzare correttamente l'origine dei suoni.
Il nostro sistema uditivo è infatti "calibrato" per ascoltare suoni provenienti dall'aria: in base al ritardo che impiega un suono a giungere alle nostre orecchie (*IDT, interaural delay time* o *ILD, interaural level difference* per le alte frequenze), capiamo da dove arriva.
In acqua, dove la velocità del suono è diversa, il nostro sistema uditivo non riesce a capire dove si trova la sorgente; e però sufficiente utilizzare un dispositivo come quelli utilizzati una volta dai sottomarini per ovviare a questo problema,infatti , essendo la velocità in acqua circa cinque volte

quella in aria, è sufficiente che si ascoltino, dall'interno di un involucro grande cinque volte la nostra testa (per mezzo di strumenti chiamati *idrofoni*) i suoni percepiti agli estremi di tale oggetto; in tale modo, inoltre, si mantiene la proporzione anche con l'effetto schermante della nostra testa. Siamo così in grado di localizzare correttamente l'origine del suono.
Per i solidi infine vale la relazione :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \qquad (20)$$

dove ***E*** è il **modulo elastico *[N/m²].***

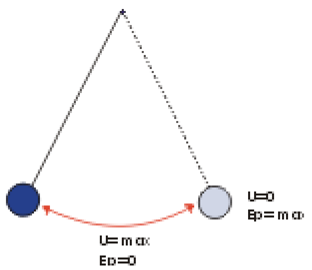
Osservando i valori della tabella e ricordando la teoria dei modelli si possono fare importanti considerazioni sulla progettazione di prototipi in scala,infatti,ricordando la formula:

$$\frac{\omega L}{c} = cost \qquad (21)$$

si può osservare che per lunghezze caratteristiche del modello **L** molto basse la frequenza d'onda aumenta in maniera eccessiva.Si può risolvere questo problema andando ad utilizzare un fluido che abbia una velocità del suono più bassa di quella dell'aria,permettendomi così di lavorare a frequenze più basse.

Cerchiamo ora di capire il legame tra pressione e velocità. Innanzitutto dobbiamo osservare l'esempio del pendolo, in cui possiamo facilmente osservare i valori di energia potenziale ed energia cinetica,ed andando a diagrammare l'andamento della velocità e la pressione vedo subito che quando una è massima l'altra è nulla e viceversa. Nell'esempio considerato le funzioni che esprimono la velocità e la pressione sono:

$$u = A\omega\cos(\omega\tau - kx)$$
$$P = P_{max}\sin(\omega\tau - kx)$$



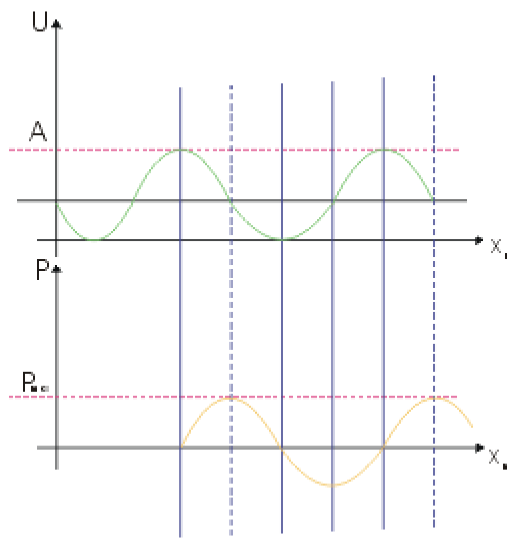


Fig.9 :Pendolo di compressione e grafico velocità / pressione

Da notare inoltre il paragone dell'andamento di queste due grandezze con la tensione e la corrente in u circuito elettrico,in cui similmente abbiamo due grandezze sfasate.Il massimo trasporto di energia lo avremo quando le due grandezze saranno in fase (analogamente ai circuiti elettrici).
Nella situazione rappresentata in figura avremo invece trasporto di energia nullo (le grandezze sono sfasate di 90°) e all'interno del tubo avrò un **campo stazionario** e otterrò delle **onde stazionarie.**
Da questi due casi "limite" teorici si estrapolano poi i casi reali, con la divisione dell'energia totale tra i due.Avremo una quota di campo stazionario e una quota di campo oscillante.

Cenni preliminari per l'equazione di D'Alambert

La propagazione del suono è un fenomeno di natura ondulatoria; anche se in alcuni ambiti dell'acustica è possibile trascurare questa natura ondulatoria del suono sviluppando un trattazione puramente energetica, in altri, come ad esempio per i fenomeni di interferenza, di diffrazione, tipici delle onde, è necessario sviluppare un modello matematico che rappresenti le caratteristiche ondulatorie dei fenomeni acustici.

I legge di Newton

Consideriamo un volumetto di fluido **dV** che in un sistema di riferimento cartesiano ha dimensioni **dx, dy, dz**:

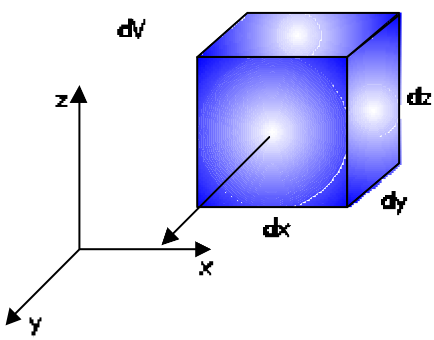


Fig.1 – volumetto di fluido

Per esso andiamo a scrivere l'equazione di moto:

$$\vec{f} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \qquad (1)$$

dove $\vec{u}$ è la velocità d'assieme, totale, del volumetto.
Il volumetto di fluido avrà però una massa:

$$dM = \rho \cdot dV = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \qquad (2)$$

Anche se abbiamo visto che i fenomeni acustici consistono in un trasporto di energia meccanica senza spostamento della materia cioè il fluido attraverso il quale si propaga il suono è mediamente fermo, nel caso più generale in cui il volumetto di fluido è in movimento occorre scrivere l'equazione di moto in un'ottica lagrangiana ossia seguendo il movimento del volumetto; la

trattazione che ne risulta è tipica del moto di un corpo dentro un fluido cioè è competenza della fluidodinamica.
Ammettendo che il volumetto si muova con una velocità d'assieme $\vec{\mathbf{u}}$ non nulla (quindi il mezzo perturbato acusticamente non è in quiete) e che il fluido di per sè non sia fermo, per un qualsiasi motivo (ad esempio per correnti d'aria), cioè ha una velocità media di trasporto $\vec{\mathbf{u}}_0$ allora posso definire la velocità acustica come lo scostamento della velocità del volumetto da quella media del fluido:

$$\vec{\mathbf{u}}' = \vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{u}}_0 \qquad (3)$$

In acustica generalmente si considera un campo in cui la velocità media del fluido nulla e così:

$$\vec{\mathbf{u}}' = \vec{\mathbf{u}} \qquad (4)$$

Quindi la velocità acustica coincide con la velocità d'assieme del fluido in moto e in questo caso la derivata della velocità rispetto al tempo, necessaria per il calcolo dell'accelerazione, deve essere fatta in modo sostanziale cioè seguendo il moto della particella. Un esempio di derivata sostanziale nel tempo, di una grandezza qualsiasi che assume valori diversi in base alla posizione nel campo, potrebbe essere la seguente:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z}}_{\text{trasporto}} \qquad (5)$$

la derivata sostanziale di $\rho = \rho(t,x,y,z)$ è uguale alla derivata parziale della densità rispetto al tempo più i termini di trasporto ossia le derivate parziali della densità rispetto le tre direzioni canoniche ciascuna moltiplicata per la rispettiva componente cartesiana della velocità.

Tornando alla nostra trattazione la derivata della velocità rispetto al tempo deve essere fatta in modo sostanziale anche se in acustica si riduce ad una derivata ordinaria perché la velocità del fluido, mediamente fermo, è nulla.

$$\vec{\mathbf{f}} = \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \mathbf{m} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \qquad (6)$$

Effettuiamo ora il bilancio delle forze:

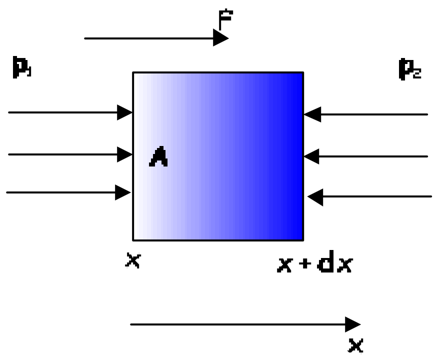


Fig.2 – schema degli sforzi

Dove:

$$p_1 = p$$

$$p_2 = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

La risultante netta degli sforzi lungo l'asse x è il prodotto tra pressione risultante lungo quella direzione per la superficie interessata **A**:

$$F_x = -(p_2 - p_1) \cdot A = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot A = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \qquad (7)$$

Analogamente per le altre due direzioni:

$$F_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz \qquad (8)$$

$$F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz \qquad (9)$$

Le derivate della pressione sono parziali per una dipendenza multipla di questa grandezza da altre ossia $\mathbf{p = p(x,y,z,t)}$.

Andando a sostituire tali relazioni nell'equazione di moto ottengo:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{D\vec{u}}{Dt} \qquad (10)$$

da cui

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\mathrm{grad}(p)} \qquad (11)$$

Il segno meno significa che il gradiente è positivo nella direzione delle pressioni crescenti mentre nel nostro caso la grandezza $(\mathbf{p_2 - p_1})$ è positiva nella direzione opposta; fisicamente ciò significa che il fluido va verso le zone a pressione minore.

Equazione di continuità

L'equazione di continuità non ha senso in assenza di fenomeni di accumulo cioè quando in regime stazionario la massa del volumetto di fluido resta costante. Questo però non è il caso dell'acustica dove periodicamente massa entra ed esce dal volumetto in quantità diverse formando accumuli che implicano una variazione della densità del volumetto stesso.
La variazione di densità è giustificata anche dal fatto che dentro al volumetto varia la velocità e la pressione del fluido; se l'aria si comporta come un gas perfetto è normale che variando la pressione cambia anche proporzionalmente la densità.

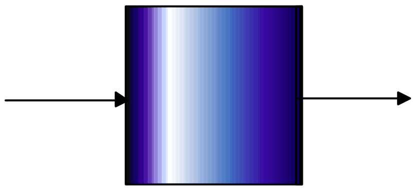


Fig.3 – accumuli di massa

Per valutare la variazione di densità nel tempo si potrebbe pensare di ricavare la differenza tra la densità in uscita dal volume e quella di ingresso ottenendo una grandezza proporzionale al flusso del vettore velocità attraverso la superficie in questione. Attraverso il teorema della divergenza, che mi permette di passare dall'integrale di superficie della velocità (flusso della velocità sulla superficie) all'integrale di volume della divergenza della velocità, giungo alla conclusione che:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho \cdot \vec{u})} \qquad (12)$$

Equazione D’Alembert

Le equazioni ricavate precedentemente hanno una validità generale, per qualsiasi fluido in moto.
Nel caso del campo acustico vengono fatte le seguenti semplificazioni legate alle caratteristiche intrinseche del campo stesso:

1. La derivata sostanziale della velocità diventa una derivata ordinaria perché il fluido è mediamente fermo.
2. Ipotesi di piccole oscillazioni.

L’ipotesi di piccole oscillazioni afferma che i fenomeni acustici perturbano il mezzo coinvolto ma di poco cioè la variazione delle grandezze fisiche del mezzo da una situazione di equilibrio, prima della sollecitazione acustica, ad una perturbata, è piccola:

$$
\begin{cases}
\mathbf{p} = \mathbf{p_0} + \mathbf{p'} \quad \text{con } \mathbf{p'} << \mathbf{p_0} \\
\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho_0} + \boldsymbol{\rho'} \quad \text{con } \boldsymbol{\rho'} << \boldsymbol{\rho_0}
\end{cases}
$$

$\mathbf{p'}$ è la pressione acustica o meglio lo scostamento da quella media all’equilibrio ed è l’unica responsabile del movimento del volumetto di fluido; $\mathbf{p_0}$ è la pressione media atmosferica, costante in ogni punto del volumetto in assenza di suono e che quindi non contribuirebbe al suo moto.

$\boldsymbol{\rho'}$ è la variazione di densità del mezzo perturbato rispetto alla situazione di equilibrio; $\boldsymbol{\rho_0}$ è la densità media, prima della sollecitazione acustica.
Per quel che riguarda la velocità non possiamo dire che $\mathbf{u'} << \mathbf{u_0}$ perché avendo imposto $\mathbf{u_0} = 0$ nulla rispetto allo zero può essere trascurato. In ogni caso $\mathbf{u'}$ resta una grandezza piccola .
Le approssimazioni fatte, dette di Boussinesq, ci permettono di trascurare i termini risultanti dal prodotto tra una quantità infinitesima e una finita rispetto le quantità finite.
Alla luce delle approssimazioni viste sopra possiamo riscrivere l’equazione di moto e quella di continuità in questo modo:

$$(\boldsymbol{\rho_0} + \cancel{\boldsymbol{\rho'}}) \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{t}} = -\mathbf{grad}(\cancel{\mathbf{p_0}} + \mathbf{p'}) \qquad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}(\cancel{\boldsymbol{\rho_0}} + \boldsymbol{\rho'}) = -(\boldsymbol{\rho_0} + \cancel{\boldsymbol{\rho'}}) \cdot \mathbf{div}(\vec{\mathbf{u}}) \qquad (14)$$

dove le derivate di grandezze costanti si annullano, gli infinitesimi si trascurano.
Le equazioni risulteranno allora in questa forma:

$$\boldsymbol{\rho_0} \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{t}} = -\mathbf{grad}(\mathbf{p'}) \qquad (15)$$

questa equazione è detta anche di Eulero.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho'}}{\partial \mathbf{t}} = -\boldsymbol{\rho_0} \cdot \mathbf{div}(\vec{\mathbf{u}}) \qquad (16)$$

Alle quali posso aggiungere:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2 \qquad (17)$$

Visto che nella pratica noi sappiamo misurare facilmente la pressione, attraverso un microfono, e la velocità del suono, tramite un anemometro, ma non abbiamo uno strumento di misura della densità, cerchiamo di eliminare dalle equazioni la dipendenza dalla densità.

$$\partial \rho = \frac{\partial p}{c^2} \qquad (18)$$

che sostituita nella equazione di continuità:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -\rho_0 \cdot c^2 \cdot \mathbf{div}(\vec{u}) \qquad (19)$$

L'ultima versione dell'equazione di continuità appena vista assieme all'equazione di moto scritta in precedenza, costituiscono un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine nelle variabili pressione e velocità che possiamo sostituire con un'unica equazione differenziale del secondo ordine.
A tale proposito, ammettendo che il campo delle velocità sia solenoidale e quindi ammette potenziale, andiamo a definire una nuova grandezza chiamata potenziale della velocità:

$$\mathbf{grad}\,\Phi = \vec{u} \qquad (20)$$

dove Φ è un campo potenziale scalare.

Sostituendo la definizione di potenziale della velocità nell'equazione di moto ottengo:

$$\rho_0 \cdot \mathbf{grad}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mathbf{grad}(p') \qquad (21)$$

Se due gradienti sono uguali, saranno uguali anche i loro argomenti:

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -p' \qquad (22)$$

Sostituendo l'uguaglianza precedente nella equazione di continuità nella nuova versione assieme alla definizione di potenziale della velocità ottengo:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 \Phi} \qquad (23)$$

Equazione D'Alembert

Integrando l'equazione D'Alembert ricavo il potenziale della velocità $\Phi(x, y, z, t)$ e quindi, attraverso il gradiente di quest'ultimo, il campo della velocità; tramite le relazioni viste posso arrivare a risolvere anche il campo delle pressioni.

In alternativa, una volta risolta l’equazione D’Alembert, posso, derivando nel tempo il potenziale, ricavare il campo di pressione e attraverso l’equazione di Eulero la velocità in ogni punto:

$$\vec{\mathbf{u}} = -\int \frac{\mathbf{grad}(\mathbf{p}')}{\rho_0}\mathbf{d}\mathbf{t} \qquad (24)$$

Grazie alla misura della pressione, facilmente realizzabile tramite microfoni, posso avere una analisi completa del campo acustico.
La relazione precedente, in cui la velocità viene ricavata come integrale nel tempo della derivata della pressione, è alla base del funzionamento degli anemometri acustici che misurano la velocità delle particelle di fluido in un campo perturbato acusticamente.

Una precisazione da fare è che l’equazione D’Alembert data la sua complessità, nella pratica si integra solo in tre casi:

1. Onda piana progressiva, è quell’onda che si sviluppa dentro il tubo di lunghezza indefinita quando il fluido al suo interno viene sollecitato da un pistone che si muove di moto armonico.
2. Onda sferica progressiva, generata da una sorgente sonora di forma sferica che irradia in ogni direzione il suono.
3. Onda piana stazionaria, è l’onda generata sempre dentro un tubo per effetto di un pistone che comprime il fluido periodicamente però in questo caso il tubo è terminato, ha lunghezza finita.

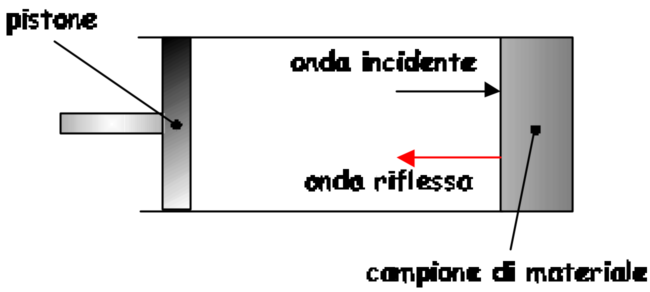


Fig.7 – tubo ad onde stazionarie

Quest’ultimo tipo di onda ha un interesse particolare per lo studio delle proprietà fonoassorbenti dei materiali. Ammettendo infatti di terminare il pistone con un campione di materiale ben preciso succede che l’onda, generata dalla compressione del fluido impressa dal pistone, giungendo alla terminazione del tubo verrà riflessa in quantità maggiore o minore a seconda delle proprietà di assorbimento del materiale. L’interferenza creatasi fra l’onda diretta e quella riflessa genererà una distribuzione di energia acustica lungo il tubo, energia associata all’onda risultante dalla sovrapposizione delle due, che sarà caratterizzata da punti di minimo e di massimo.
In alcuni punti l’onda riflessa va a cancellare quella diretta ottenendo dei minimi, in altri va a sommarsi creando dei massimi. Dallo studio del campo di interferenza ottenuto con questa prova riesco a dedurre alcune proprietà del materiale posto alla terminazione del tubo.
In particolare modo misurando attraverso uno o più anemometri acustici la componente di ritorno dell’onda sonora, in prossimità della superficie di riflessione, riesco a classificare il materiale come un buon assorbente o meno.
Questo tubo di lunghezza finita sollecitato dal pistone è un vero e proprio strumento di misura chiamato tubo ad onde stazionarie.

A parte i tre casi visti precedentemente, l'equazione D'Alembert non si integra quasi mai; per alcuni problemi geometricamente complessi esistono metodi di risoluzione numerica dell'equazione, chiamati metodi agli elementi finiti che però vanno oltre la nostra trattazione.

Potenza sonora W

E' la potenza (o energia per unità di tempo) che una sorgente acustica trasmette al fluido circostante perturbato da onda sonora e si misura in Watt.
Nel caso di sorgenti elettroacustiche:

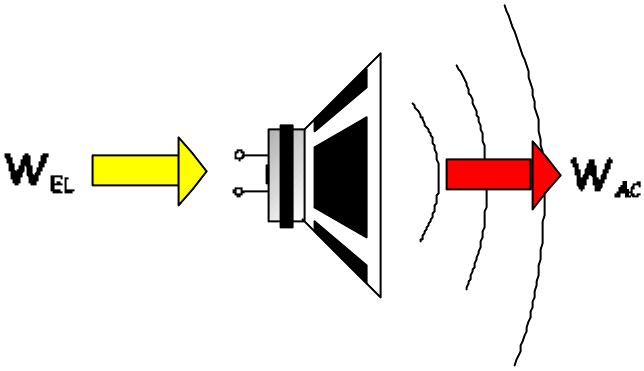


Fig.8 – diagramma delle potenze

Si definisce rendimento:

$$\boxed{\mathbf{h} = \frac{\mathbf{W}_{AC}}{\mathbf{W}_{EL}}} \tag{27}$$

Tale rendimento è generalmente basso; per altoparlanti HI-FI vale 1 o 2% mentre per altoparlanti a tromba vale 15% cioè pur non essendo ad alta fedeltà sono molto più efficaci per produrre molta pressione sonora a partire da poca potenza elettrica.
Per fare un esempio numerico se un altoparlante di tipo commerciale è a 25W di potenza elettrica e ha un rendimento di 2.5%, la potenza acustica trasmessa al mezzo è di 0.625W, molto piccola tenendo presente che la potenza acustica della voce non amplificata è dell'ordine di 50mW.

Intensità sonora media

Considerando una sorgente omnidirezionale di suono

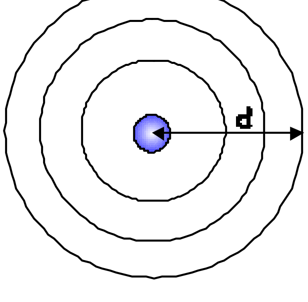


Fig.9 – sorgente sferica omnidirezionale

Ponendomi ad una distanza **d** dal suo centro, definiamo intensità sonora media:

$$\boxed{\mathbf{I = \frac{W}{S} = \frac{W}{4\pi d^2}}} \qquad (28)$$

Si nota che l'intensità non è costante ma varia con la distanza dalla sorgente.

Inoltre vi è da tenere in considerazione che se la sorgente è fortemente direzionale, come la maggioranza degli altoparlanti commerciali, l'energia risulta essere tutta concentrata come in un lobo direzionato e quindi non appena mi sposto angolarmente dalla traiettoria segnata da questo lobo avverto una diminuzione di intensità pur rimanendo alla stessa distanza dal centro della sorgente.

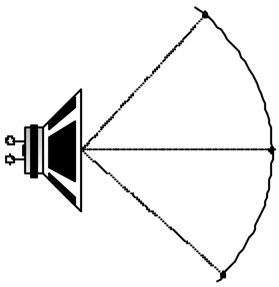


Fig.10 – direzionalità dell'altoparlante

Intensità sonora istantanea

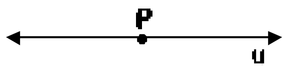


Fig.11 – vettore velocità

Preso un punto P del campo sonoro nel quale il vettore velocità oscilla avanti e indietro lungo una certa direzione e la pressione (campo scalare) oscilla anch'essa attorno al valore medio atmosferico, in questo punto si verifica un trasporto di energia e si può definire l'intensità sonora istantanea così:

$$\boxed{\mathbf{\vec{i}(t) = p'(t) \cdot \vec{u}'(t)}} \qquad (29)$$

Si potrebbe pensare alla pressione e alla velocità nel campo acustico come alla tensione e alla corrente in un equivalente circuito elettrico in regime alternato: se le due grandezze sono in fase ho il massimo trasferimento di energia e i due campi si dicono sincroni; nel caso in cui sono sfasate fra di loro l'energia a volte cresce altre diminuisce e mediamente è nulla.

L'intensità media può essere ricavata come media temporale del valore istantaneo:

$$\boxed{\mathbf{I = \frac{1}{T}\int_0^T (p \cdot u)\,dt}} \qquad (30)$$

Da notare è che in questo caso non occorre fare una media quadratica, data la presenza del prodotto di due grandezze misurabili, pressione e velocità; anticamente quando non si sapeva ancora misurare la velocità dei fluidi si approssimava la intensità media con il quadrato della pressione ed

effettivamente questo è ragionevole se si pensa che se pressione e velocità sono in fase, posso vedere l'una, ad esempio la velocità, come uguale all'altra, la pressione, a meno di un coefficiente moltiplicativo, e quindi il loro prodotto è una grandezza quadratica, il quadrato della pressione, e si presta bene ad approssimare l'intensità media (questa situazione si verificata nel caso di onda piana progressiva).
Se pressione e velocità sono in fase, il loro prodotto mediato nel tempo, che è poi l'intensità media, è equivalente alla massima potenza trasferita da un circuito elettrico in alternata dove tensione e corrente sono in fase (**V I**) e ciò corrisponde ad una situazione di massima energia.
Nel caso in cui le due grandezze non sono in fase la potenza media trasferita, cioè l'intensità media, diminuisce perché devo moltiplicare il loro prodotto per il coseno dello sfasamento **j**. Nel caso peggiore in cui lo sfasamento è di $\pi/2$ l'intensità media, la simbolica potenza media, si annulla ($\cos(\pi/2) = 0$) mentre quella istantanea può essere anche diversa da zero. Questa è la situazione che si genera dentro al tubo ad onde stazionarie.

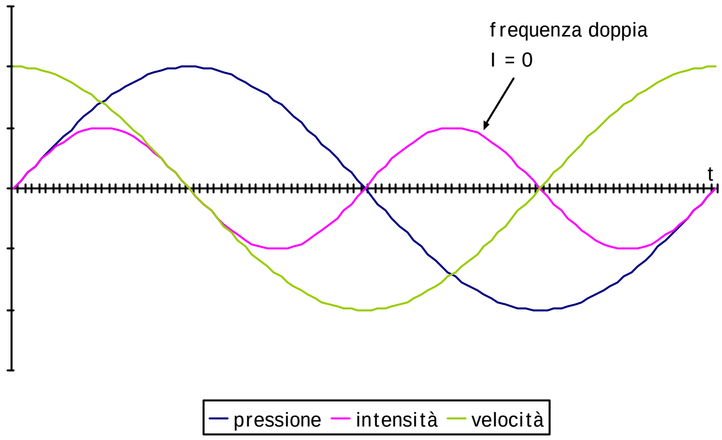


Fig.12 – intensità in un tubo ad onde stazionarie

Nel caso in cui pressione e velocità sono sfasate di $\pi/2$ si può osservare un fenomeno curioso: l'intensità istantanea è un segnale della stessa forma ma di frequenza doppia.
Nel caso in cui pressione e velocità sono in fase l'intensità istantanea è un segnale a frequenza doppia rispetto a quello di partenza (spettralmente contiene anche armoniche di frequenza superiore) ma che ha perso la forma originaria.

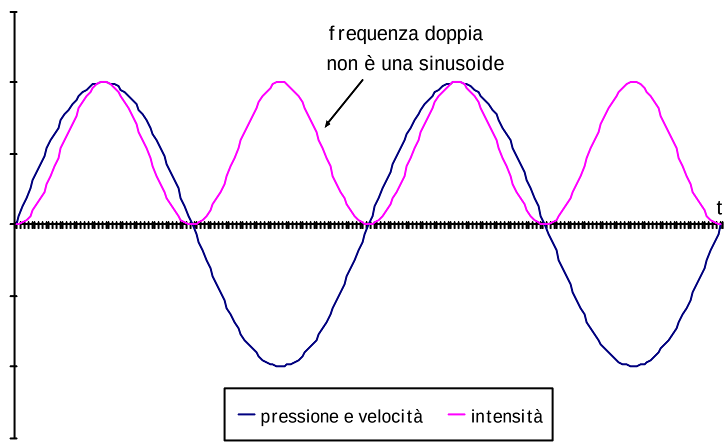


Fig.13 – l'intensità distorce l'informazione del campo sonoro

Ciò significa che di per sè l'intensità istantanea non contiene informazioni sulla forma d'onda sonora di partenza perché è un segnale fortemente distorto.
L'intensità sonora istantanea acquista un significato solo nel momento in cui la vado ad integrare nel tempo trovando un valore medio significativo dell'energia in gioco nel campo acustico.
Questo mette in evidenza come una analisi intesimetrica, energetica, sia molto pratica perché ci risparmia la risoluzione delle equazione delle onde ma comporta una perdita dell'informazione associata al suono; l'unica informazione che si conserva è quella energetica, ma non è sufficiente per la comprensione del messaggio contenuto in un suono.

Impedenza acustica Z

L'impedenza acustica è il rapporto fra i moduli di pressione e velocità:

$$\boxed{\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}}} \tag{31}$$

Questo rapporto dipenderebbe dal tempo visto che sia pressione che velocità sono funzioni del tempo.
Però sia **p** che **u** sono segnali che copiano la stessa forma d'onda di partenza e quindi il loro rapporto non dipende dal tempo ma solo dal punto del campo sonoro in cui lo vado a calcolare.
Inoltre in casi geometrici semplici, come quelli che noi trattiamo, anche la dipendenza spaziale della impedenza sparisce:

- Nelle onde piane stazionarie **Z** = costante;
- Nelle onde sferiche **Z** = **Z(d)**

cioè l'impedenza dipende solo dalla distanza dal centro della sorgente acustica e non dalle altre due coordinate angolari del sistema di riferimento sferico;
L'unità di misura dell'impedenza è:

$$[\mathbf{Z}] = \frac{\mathbf{Pa}}{\mathbf{m/s}} = \mathbf{Rayl} \tag{32}$$

Fisicamente l'impedenza acustica mi dice quanto un campo è "morbido" ossia in che modo reagisce alla sollecitazione di una forza quale può essere quella di pressione del suono. Concetto equivalente all'impedenza acustica è l'impedenza meccanica definita come:

$$\mathbf{Z_M} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{u}} \tag{33}$$

ossia l'impedenza acustica è pari ad una impedenza meccanica su unità di superficie perché al posto della forza **F** ho la pressione **p** che è forza su unità di superficie.

L'impedenza meccanica è una concetto legato alla deformabilità e capacità di vibrare di un corpo: se un corpo ha una elevata impedenza meccanica servono forze elevate per ottenere apprezzabili velocità ossia oscillazioni del corpo stesso; se invece ha impedenza meccanica bassa con poca forza imprimo forti oscillazioni al corpo.
Analogamente posso ragionare con l'impedenza acustica: in un campo acustico a bassa impedenza con poca pressione riesco ad ottenere velocità notevoli mentre se il campo è ad alta impedenza servono pressioni elevate per ottenere velocità apprezzabili.

Ragionando in modo duale per avvicinarci di più alla realtà possiamo dire che generalmente lo scopo degli altoparlanti è quello di generare, mediante la velocità del padiglione impressa elettricamente, una pressione che poi verrà percepita dal nostro orecchio.
Se mi trovo in un campo a bassa impedenza occorrono velocità molto elevate per poter generare una pressione acustica apprezzabile, una situazione che non è fra le più ideali; viceversa se l'impedenza è alta significa che con velocità basse, cioè con poca energia meccanica sull'altoparlante, ottengo elevate pressioni, quindi questo tipo di campo è più favorevole per l'altoparlante.
L'ultimo caso trattato è alla base del principio di funzionamento dell'altoparlante a tromba:

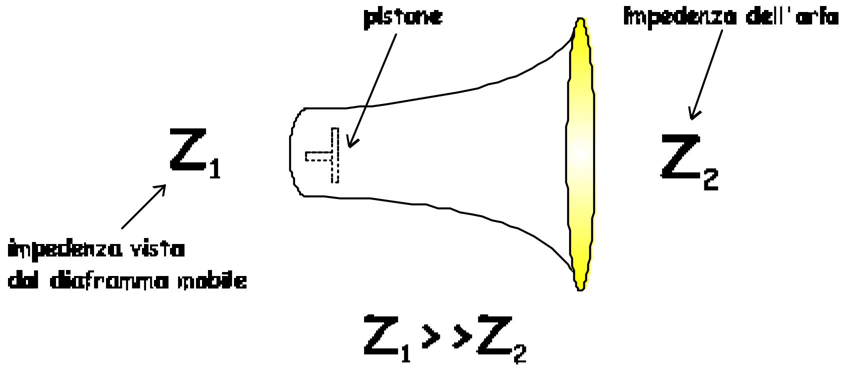


Fig.14 – adattatore di impedenza

Il diaframma mobile posto in prossimità dell'imboccatura della tromba vede una impedenza $\mathbf{Z_1}$ molto alta rispetto a quella dell'aria $\mathbf{Z_2}$ all'altra estremità, quindi lavora in condizioni ideali perché con basse velocità, poca energia meccanica, sviluppa elevate pressioni.
La tromba può quindi essere vista come un adattatore di impedenza acustica, paragonabile al trasformatore per i circuiti elettrici.
Nella pratica costruire degli altoparlanti che funzionano a basse velocità è più facile che costruirli per velocità elevate perché per funzionare con sollecitazioni molto rapide dovrebbero essere costruiti di materiale più leggero e quindi meno robusto.

Onde piane

Lo studio delle onde piane viene affrontato ricavando i campi di pressione e velocità:
1. $\mathbf{p = p(x,y,z,t)}$
2. $\mathbf{u = u(x,y,z,t)}$

Ponendoci in una specifica situazione geometrica ricaviamo una soluzione dell'equazione D'Alembert, cioè il potenziale della velocità, dalla quale deriviamo la pressione e la velocità che mi permetteranno anche di ricavare l'intensità media e l'impedenza del campo.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 \Phi \qquad (34)$$

$$\vec{u} = \mathrm{grad}\,\Phi \qquad (35)$$

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (36)$$

La situazione geometrica in cui ci poniamo è un pistone piano infinito che si muove avanti e indietro lungo una direzione di moto armonico.

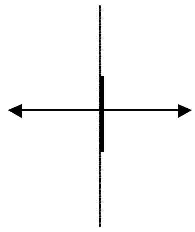


Fig.15 – pistone piano infinito

Per l'onda piana progressiva la soluzione all'equazione D'Alembert è una funzione di tipo armonico:

$$\mathbf{\Phi = \Phi_{MAX} \cdot \cos[\omega t - kx]} \qquad (37)$$

con $\mathbf{k = \frac{\omega}{c}}$ chiamato numero d'onda.

Esprimiamo il potenziale della velocità in notazione complessa:

$$\mathbf{\Phi = Re\left\{\Phi_{MAX} \cdot e^{j(\omega t - kx)}\right\}} \qquad (38)$$

Generalmente si tende ad omettere l'indicazione della parte reale della grandezza esponenziale solo per comodità, sottintendendo che tutte le grandezze fisiche sono reali e anche se vengono rappresentate in notazione complessa, per comodità di calcolo, di esse dobbiamo considerare solo la parte reale:

$$\boxed{\mathbf{\Phi = \Phi_{MAX} \cdot e^{j(\omega t - kx)}}} \qquad (39)$$

Ricaviamo allora la velocità come gradiente del potenziale di velocità; vista la situazione geometrica in cui ci siamo posti il gradiente si riduce alla sola derivata direzionale lungo x:

$$\mathbf{\vec{u} = grad\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -j \cdot k \cdot \Phi_{MAX} \cdot e^{j(\omega t - kx)}} \qquad (40)$$

Il valore **-j** indica che la velocità è sfasata di -π/2 rispetto al potenziale e quindi se quest'ultimo è una grandezza cosinusoidale, la velocità sarà una grandezza sinusoidale.

Per ricavare la costante $\mathbf{\Phi_{MAX}}$ impongo la condizione all'origine, in cui il pistone nella posizione centrale dell'oscillazione x = 0 e all'istante iniziale di osservazione del fenomeno τ = 0, presenta velocità massima:

$$\begin{cases} \mathbf{u = u_{MAX}} & (41) \\ \mathbf{u_{MAX} = -j \cdot k \cdot \Phi_{MAX}} & (42) \end{cases}$$

Si può concludere che:

$$\mathbf{\left|\Phi_{MAX}\right| = \left|\frac{u_{MAX}}{k}\right|} \qquad (43)$$

Complessivamente ricaviamo l'espressione della velocità (o meglio solo la sua parte reale):

$$\boxed{\mathbf{u = u_{MAX} \cdot e^{j(\omega t - kx)}}} \tag{44}$$

Passiamo ora al calcolo della pressione:

$$\begin{cases} \mathbf{p = -\rho_0 \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = -j \cdot \rho_0 \cdot \omega \cdot \Phi_{MAX} \cdot e^{j(\omega t - kx)}} & (45) \\[2ex] \mathbf{\Phi_{MAX} = -\dfrac{u_{MAX}}{j \cdot k}} & (46) \\[2ex] \mathbf{c = \dfrac{\omega}{k}} & (47) \end{cases}$$

Per cui effettuando le opportune sostituzioni:

$$\boxed{\mathbf{p = c \cdot \rho_0 \cdot u_{MAX} \cdot e^{j(\omega t - kx)} = p_{MAX} \cdot e^{j(\omega t - kx)}}} \tag{48}$$

Si può notare che pressione e velocità hanno espressioni molto simili fra di loro e differiscono per il solo termine moltiplicativo costante:

$$\boxed{\mathbf{u = \frac{p_{MAX}}{\rho_0 \cdot c} e^{j(\omega t - kx)}}} \tag{49}$$

L'impedenza per l'onda piana progressiva risulterà essere costante:

$$\mathbf{z = \frac{p}{u} = \rho_0 \cdot c = 415\ Rayls} \tag{50}$$

Si può notare anche che pressione e velocità sono in fase (hanno lo stesso termine esponenziale) e quindi il loro prodotto, che sarà un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli, e per fase la somma delle fasi, sarà:

$$\boxed{\mathbf{i(t) = c \cdot \rho_0 \cdot u_{MAX}^{\ 2} \cdot e^{2j(\omega t - kx)} = \frac{p_{MAX}^{\ 2}}{\rho_0 \cdot c} e^{2j(\omega t - kx)}}} \tag{51}$$

L'intensità istantanea è in questo caso una grandezza che oscilla a frequenza doppia rispetto le grandezze caratteristiche del campo acustico, pressione o velocità.

Visto che sto parlando di grandezze sinusoidali posso sostituire i valori massimi con i rispettivi valori RMS:

$$\mathbf{\overline{p}_{RMS} = \frac{p_{MAX}}{\sqrt{2}}} \tag{52}$$

$$\overline{u}_{RMS} = \frac{u_{MAX}}{\sqrt{2}} \tag{53}$$

Effettuando una media temporale dell’intensità istantanea ricavo l’intensità media:

$$\boxed{I = \frac{1}{2} r_0 \cdot c \cdot u_{MAX}{}^2 = r_0 \cdot c \cdot \overline{u}_{RMS}{}^2} \tag{54}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \frac{p_{MAX}{}^2}{r_0 \cdot c} = \frac{\overline{p}_{RMS}{}^2}{r_0 \cdot c}} \tag{55}$$

Nel caso di onda piana progressiva pressione e velocità media sono proporzionali all’intensità media e questo nella pratica significa che misurando attraverso un microfono la pressione e facendone il quadrato riesco immediatamente a ricavare l’intensità del campo sonoro.