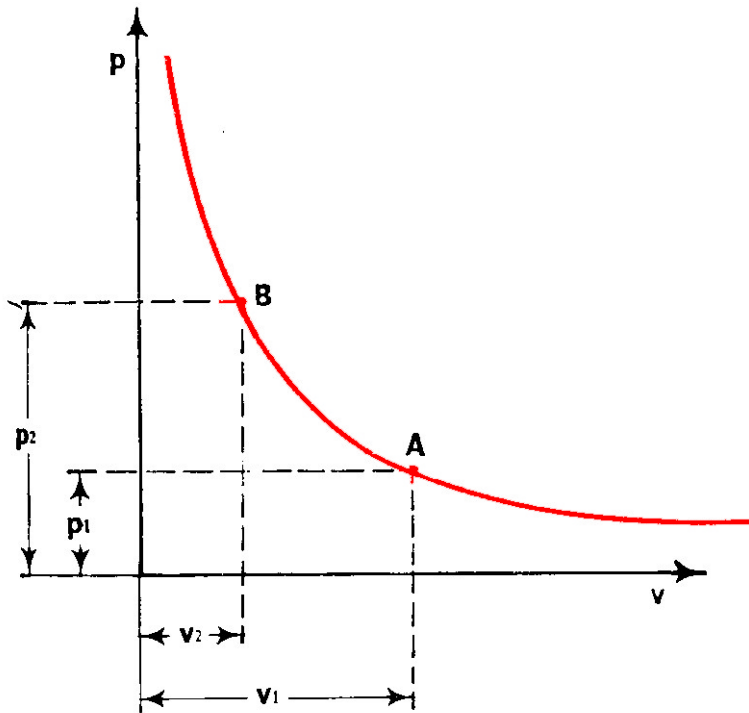
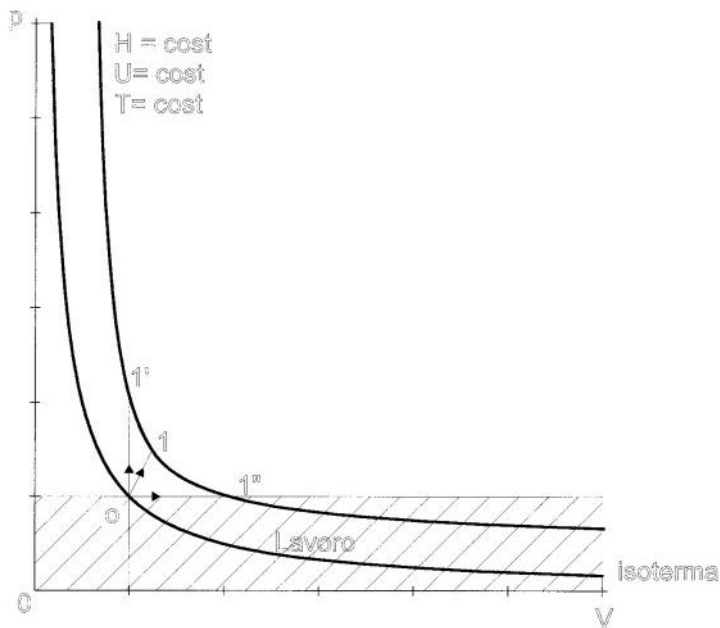


CALCOLO DELL'ENERGIA INTERNA



(trasformazione a temperatura costante)



- $U_0 = 0 \text{ J}$ → energia (J)
- $p_0 = 1 \text{ bar}$ → pressione (Pa)
- $T_0 = 273 \text{ K}$ → temperatura (K)
- M → massa (kg)
- c_v → capacità termica a volume costante (J/K)

$$Q_{0 \rightarrow 1} = M * c_p * (T_1 + T_0)$$

$$\Delta U = M * c_v * (T_1 + T_0)$$

- $U_1' = U_0 + M * c_v * (T_1 + T_0)$

...ma essendo

$$U_0 = 0 \quad e$$

$$U = M * c_v * T \quad (\text{dove } T \text{ è la temperatura espansa espressa in } c^\circ)$$

- $U_1' = M * c_v * T$

$$\text{ENTALPIA (H)} = U + p * V$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ U(t) + M * R * T & = & H(t) \end{array}$$

$$L = Q - \Delta U = p_0 * (V_1 - V_0) = M * R * (T_1 + T_0)$$

$$\Delta H = H_1 - H_0 = U_1 - U_0 + (p_1 * V_1 - p_0 * V_0)$$

... ma essendo

$$U_1 - U_0 = M * c_v * (T_1 + T_0) \quad e$$

$$(p_1 * V_1 - p_0 * V_0) = M * R * (T_1 + T_0)$$

allora

$$H = M * c_p * T$$

$$U = M * c_v * T$$

...e non importa, ai fini del calcolo, che la reazione sia avvenuta, o meno, a pressione e volume costante in quanto queste grandezze sono funzioni di stato!!!

L'ENTROPIA di un gas perfetto dipende da 3 variabili:

$$S(p, T)$$

$$S(p, V)$$

$$S(V, T)$$

Le curve isoentropiche sono, quindi, tridimensionali.

Integrando i termine si hanno le seguenti:

$$dH = dU + d(pV)$$

$$dH = dU + Vdp + pdV$$

...sostituendo $dU = dQ - dL$ si ha

$$dH = dQ - dL - Vdp + pdV$$

... ma sapendo che $dQ = dU + pdV$

$$dH - Vdp - pdV = dQ - pdV$$

Primo principio della termodinamica espresso in forma entalpica

$$dH = dQ + Vdp$$

da cui

$$dQ = dH - Vdp$$

$$dS = dQ / dT = \rightarrow (dV + pdV) / T = M^*c_v (dT / T) + (M^*R / V) dV$$

$$\rightarrow (dH + Vdp) / T = M^*c_p (dT / T) + (M^*R / p) dV$$

$$p^*V = M^*R^*T$$

$$p / T = (M^*R) / V$$

$$V / T = (M^*R) / p$$

$$S_B - S_A = \left\{ \begin{array}{l} \int_A^B M^*c_v (dT / T) + M^*R (dV / V) = \\ \int_A^B M^*c_p (dT / T) - M^*R (dp / p) = \end{array} \right.$$

= {

$$M^*c_v * \ln (T_B / T_A) + M^*R * \ln (V_B / V_A)$$

$$M^*c_p * \ln (T_B / T_A) - M^*R * \ln (p_B / p_A)$$

... dove la prima formula esprime ΔS in funzione di pressione e temperatura mentre la seconda in funzione di volume e temperatura.

Combinando le due equazioni precedenti, si ottengono le seguenti:

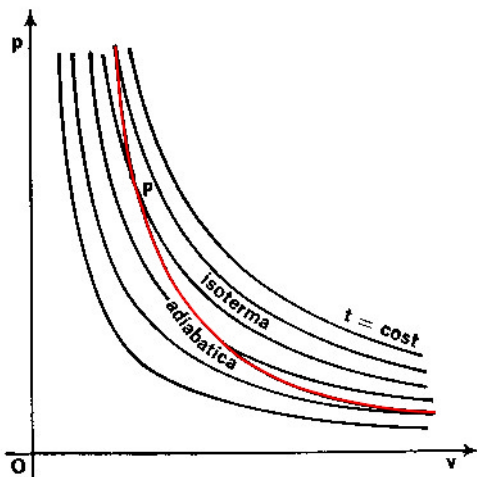
$$\begin{array}{l} p_A^* V_A = M^* R^* T_A \\ p_B^* V_B = M^* R^* T_B \end{array} \quad \rightarrow \text{facendo il rapporto} \rightarrow \quad \begin{array}{l} p_A^* V_A = T_A \\ p_B^* V_B = T_B \end{array}$$

...andando a sostituire

$$\begin{aligned} S_B - S_A &= M^* c_v^* \ln (T_B / T_A) + M^* R^* \ln (V_B / V_A) = \\ &= M^* c_v^* \ln (p_B^* V_B / p_A^* V_A) + M^* R^* \ln (V_B / V_A) = \\ &= M^* c_v^* \ln (p_B / p_A) + M^* c_v^* \ln (V_B / V_A) + M^* R^* \ln (V_B / V_A) = \end{aligned}$$

$$= M^* c_v^* \ln (p_B / p_A) + M^* c_p^* \ln (V_B / V_A)$$

... che rappresenta la formula di calcolo di ΔS in funzione di pressione e volume. Questa espressione, inoltre, mette in luce le curve isoentropiche, ovvero, il luogo dei punti delle reazioni reversibili adiabatiche.



(fascio delle isoterme e la trasformazione adiabatica)

$$c_v^* \ln (p_B / p_A) + c_p^* \ln (V_B / V_A) = 0$$

$$c_v^* \ln (p_B / p_A) = - c_p^* \ln (V_B / V_A)$$

$$\ln (p_B / p_A)^{c_v} = \ln (V_B / V_A)^{c_p}$$

$$(p_B / p_A)^{c_v} = (V_B / V_A)^{c_p}$$

$$p_B^{C_v} * V_B^{C_p} = p_A^{C_v} * V_A^{C_p}$$

$$p_B * V_B^{(C_p/C_v)} = p_A * V_A^{(C_p/C_v)}$$

... ponendo $c_p / c_v = \gamma$ otteniamo

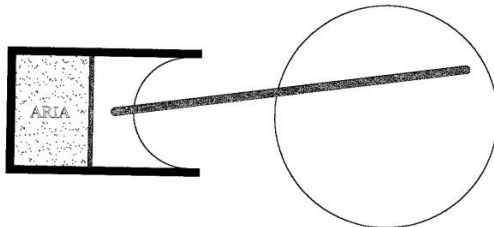
l'equazione della curva adiabatca :

$$p * V^\gamma = k \quad \text{con } k = \text{cost.}$$

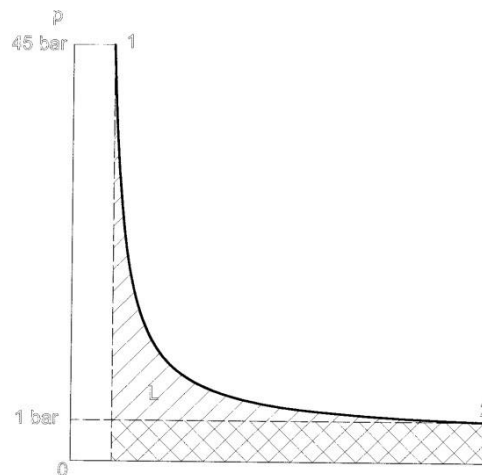
Da notare che $\gamma > 1$ sempre !!! Ciò è spiegabile col fatto che $c_p > c_v$.

Questa equazione determina la legge di espansione dei gas ed il suo grafico è costituito da una curva più ripida di quella che rappresenta l'isoterma.

Esercizio 1



(pistone)



Dati:

$$p_1 = 45 \text{ bar}$$

$$T_1 = 450^\circ \text{ c}$$

$$c_p = 1005 \text{ (J/K)}$$

$$c_v = 717 \text{ (J/K)}$$

$$\rightarrow \gamma = c_p / c_v = 1,40$$

$$M = 1 \text{ kg}$$

Richieste: L?

Svolgimento:

Poiché la reazione è reversibile, è possibile stabilire che

$$p_1 * V_1^\gamma = p_2 * V_2^\gamma \quad (1)$$

e quindi, sapere che l'entropia del punto 1 è pari a quella del punto 2.

$$p_1 * V_1 = M * R * T \rightarrow V_1 = (M * R * T) / p_1$$

Andando a sostituire nella (1) V_1 si ha

$$p_1 * [(M * R * T_1) / p_1]^\gamma = p_2 * [(M * R * T_2) / p_2]^\gamma$$

è possibile semplificare $M * R$ in entrambi i membri e quindi

$$p_1^{(1-\gamma)} * T_1^\gamma = p_2^{(1-\gamma)} * T_2^\gamma$$

$$(1-\gamma) / \gamma = (1-1,40)/1,40 = -0,286$$

Possiamo così ottenere

$$T_2 = T_1 * (p_1 / p_2)^{[(1-\gamma) / \gamma]} = 723 * (45/1) * (-0,286) = 243 \text{ K}$$

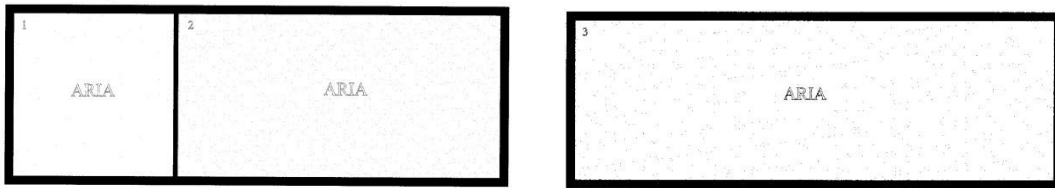
Volendo sapere il valore in °C sottraiamo al risultato 273 ottenendo - 30°C

Sapendo che la trasformazione è adiabatica, possiamo dire che $Q = 0$ e quindi

$$\Delta U = Q - L = -L$$

$$L = M * c_v * (T_1 / T_2) = 1 * 717 * (450+30) = 344.160 \text{ J}$$

Volendo sapere il lavoro effettivamente trasmesso all'albero, si dovrebbe togliere al risultato ottenuto, il lavoro dissipato sull'ambiente.

Esercizio 2 "Lo scatolone adiabatico"**Dati:**

$$Q = 0 \text{ J}$$

$$L = 0 \text{ J}$$

$$V_1 = 1 \text{ m}^3$$

$$V_2 = 2 \text{ m}^3$$

→ $V_3 = 3 \text{ m}^3$ (essendo l'aria in uno scatolone adiabatico, abbiamo la conservazione del volume)

$$T_1 = 100^\circ \text{ C} \rightarrow 373 \text{ K}$$

$$T_2 = 200^\circ \text{ C} \rightarrow 473 \text{ K}$$

$$p_1 = 1 \text{ bar}$$

$$p_2 = 10 \text{ bar}$$

$$\rightarrow R_{\text{ARIA}} = 287 \text{ J/kg K}$$

Richieste: $T_3?$ $p_3?$

Svolgimento:

Abbiamo 2 incognite e quindi dobbiamo trovare il sistema a due equazioni che ci dia le soluzioni cercate.

Considerando che

$$\left. \begin{array}{l} Q = 0 \\ L = 0 \end{array} \right\} \Delta U = 0 \text{ J}$$

Possiamo scrivere il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_3 = U_1 + U_2 \\ M_3 = M_1 + M_2 \end{array} \right.$$

... ma dall'equazione di stato, possiamo ottenere i seguenti risultati:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 * V_1 = M_1 * R * T_1 \\ p_2 * V_2 = M_2 * R * T_2 \end{array} \right.$$

↓

$$M_1 = (p_1 * V_1) / (R * T_1) = (100.000 * 1) / (287 * 373) = 0,934 \text{ kg}$$

$$M_2 = (p_2 * V_2) / (R * T_2) = (100.000.000 * 2) / (287 * 473) = 14,746 \text{ kg}$$

Quindi, sommando i risultati ottenuti, otteniamo che:

$$M_3 = M_1 + M_2 = 15,68 \text{ kg}$$

Per il sistema scritto sopra, sappiamo, inoltre, che:

$$U_3 = U_1 + U_2$$

che è equivalente a scrivere:

$$M_3 * c_v * T_3 = M_1 * c_v * T_1 + M_2 * c_v * T_2$$

Dividendo entrambi i membri per c_v otteniamo che:

$$T_3 = (M_1 * T_1 + M_2 * T_2) / (M_1 + M_2) = (0,934 * 100 + 14,746 * 200) / (15,68) = 194^\circ \text{ C}$$

Applicando di nuovo l'equazione di stato:

$$p_3 * V_3 = M_3 * R * T_3$$

da cui

$$p_3 = (M_3 * R * T_3) / V_3 = [15,68 * 287 * (194 + 273)] / 3 = 699.832 \text{ Pa} \approx 7 \text{ bar}$$

Esercizio 3

Condizioni del problema precedente con le variazioni indicate di seguito.

Dati:

$$V_1 = 1 \text{ m}^3 (\text{O}_2)$$

$$V_2 = 2 \text{ m}^3 (\text{N}_2)$$

$$T_1 = 100^\circ \text{ C} (\text{O}_2)$$

$$T_2 = 200^\circ \text{ C} (\text{N}_2)$$

$$p_1 = 1 \text{ bar}$$

$$p_2 = 2 \text{ bar}$$

Richieste: Composizione del miscuglio? T_3 ? V_3 ? p_3 ? % in moli ? % in massa ?

Svolgimento:

NOTA

Composizione dell'aria:

21% O₂ 79% N₂ (% in moli)23,3% O₂ 76,7% N₂ (% in massa)

Il miscuglio che si otterrà coi dati del problema, sarà aria sintetica in cui sono alterate le percentuali di O₂ e N₂ rispetto all'aria che troviamo in natura; questo miscuglio prende il nome di nitrox.

$$p_1 \cdot V_1 = M_1 \cdot R \cdot T_1$$

$$R_1 = R_0 / \mu_1 = 8.314 / 32 = 259,812 \text{ J/kg K}$$

dove μ_1 è la massa molare dell'ossigeno.

$$M_1 = (p_1 \cdot V_1) / (R_1 \cdot T_1) = (100.000 \cdot 1) / (259,812 \cdot 373) = 1,03 \text{ kg}$$

$$p_2 \cdot V_2 = M_2 \cdot R \cdot T_2$$

$$R_2 = R_0 / \mu_2 = 8.314 / 28 = 296,928 \text{ J/kg K}$$

dove μ_2 è la massa molare dell'azoto.

$$M_2 = (p_2 \cdot V_2) / (R \cdot T_2) = (2.000.000 \cdot 2) / (296,928 \cdot 473) = 2,85 \text{ kg}$$

$$M_3 = M_1 + M_2 = 3,88 \text{ kg}$$

$$\%_{\text{MASSA}} \text{O}_2 = M_1 / M_3 = 1,03 / 3,88 = 26,54 \%$$

$$\%_{\text{MASSA}} \text{N}_2 = M_2 / M_3 = 2,85 / 3,88 = 73,46 \%$$

$$n_{\text{moli}} \text{O}_2 = M_1 / \mu_1 = 1,03 / 32 = 0,00322$$

$$n_{\text{moli}} \text{N}_2 = M_2 / \mu_2 = 2,85 / 28 = 0,10178$$

$$\%_{\text{moli}} \text{O}_2 = n_{\text{moli}} \text{O}_2 / (n_{\text{moli}} \text{O}_2 + n_{\text{moli}} \text{N}_2) = 0,00322 / (0,00322 + 0,10178) = 24\%$$

$$\%_{\text{moli}} \text{N}_2 = n_{\text{moli}} \text{N}_2 / (n_{\text{moli}} \text{O}_2 + n_{\text{moli}} \text{N}_2) = 0,10178 / (0,00322 + 0,10178) = 76\%$$

$$U_3 = U_1 + U_2$$

da cui

$$M_3 \cdot c_{v3} \cdot T_3 = M_1 \cdot c_{v1} \cdot T_1 + M_2 \cdot c_{v2} \cdot T_2$$

$$c_{v3} = (M_1 * c_{v1} + M_2 * c_{v2}) / (M_1 + M_2) =$$

$$= (1,03 * 634 + 2,85 * 724) / 3,88 = 700 \text{ J/kg K}$$

c_{v3} risulta, quindi, essere la media pesata dei c_v dei due componenti !!

$$T_3 = (M_1 * c_{v1} * T_1 + M_2 * c_{v2} * T_2) / (M_3 * c_{v3}) =$$

$$= (1,03 * 634 * 100) + (2,85 * 724 * 200) / (3,88 * 700) = 176 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$p_3 * V_3 = M_3 * R_3 * T_3$$

$$R_3 = (M_1 * R_1 + M_2 * R_2) / (M_1 + M_2) =$$

$$= (1,03 * 259,812 + 2,85 * 296,928) / 3,88 = 287 \text{ J/kg K}$$

$$p_3 = (M_3 * R * T_3) / V_3 = [3,88 * 287 * (175 + 273)] / 3 = 166.600 \text{ Pa} \approx 1,67 \text{ bar}$$