TRASMISSIONE DEL CALORE

ARGOMENTI TRATTATI

INTRODUZIONE

Lo studio dei fenomeni di trasmissione del calore riguarda tutti quei processi fisici nei quali una certa quantità di energia termica è trasferita da un sistema ad un altro a causa di una differenza di temperatura.

Tali processi avvengono in accordo con i principi della termodinamica: quindi per il primo principio, l’energia termica ceduta da un sistema deve essere uguale a quella ricevuta dall’altro e il calore, come afferma il secondo principio, passa dal corpo più caldo a quello più freddo. Tuttavia tra termodinamica e trasmissione del calore c’è una fondamentale differenza. Infatti in ambito termodinamico è irrilevante il tempo necessario affinché un dato processo sia ultimato, in quanto ora, l’oggetto di studio della termodinamica sono i sistemi in equilibrio e le grandezze fisiche in gioco sono considerate indipendenti dal tempo. Nella trasmissione del calore, chiamata anche Termocinetica, ciò che conta è la rapidità in cui avviene il processo di scambio termico. Riveste quindi notevole importanza la quantità di calore scambiata nell’unità di tempo che prende il nome di potenza termica. Essa viene indicata con il simbolo $\dot{\mathbf{Q}}$ e poiché è una potenza, nel sistema internazionale si misura in watt.

Riassumendo, lo scopo della Termocinetica è studiare la velocità di scambio del calore invece della quantità assoluta trasferita in un tempo infinito, come avviene in Termodinamica.

MODALITA’ DI SCAMBIO TERMICO

La trasmissione del calore avviene spontaneamente solo da un corpo caldo ad un corpo freddo, fino a che i due corpi raggiungono la stessa temperatura, detta di equilibrio termico. Il corpo caldo comunica a quello freddo parte della sua energia termica intensificandone l’agitazione molecolare. La propagazione del calore può avvenire per *conduzione*, *convezione* o per *irraggiamento*.

CONDUZIONE

Il trasferimento per *conduzione* avviene tra corpi che sono a contatto, o tra parti di uno stesso corpo che si trovano a temperature diverse. Esso è causato dal trasferimento di energia cinetica da una molecola a quella adiacente che possiede una velocità di vibrazione minore. Poiché la velocità di vibrazione delle particelle è direttamente proporzionale alla temperatura, il corpo caldo cede energia a quello freddo, aumentandone la temperatura, finché non è raggiunto l'equilibrio termico. Prendiamo ad esempio, come indicato in figura 1a, due corpi a temperature diverse. Una volta posti in contatto, per conduzione il calore fluisce dal corpo più caldo a quello più freddo, finché essi raggiungono una temperatura d'equilibrio.

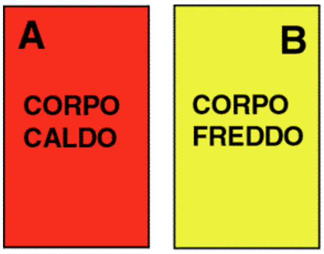

Fig.1a

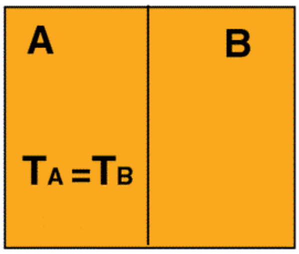

Fig.1b

CONVEZIONE

La *convezione* ha luogo quando uno dei due corpi interessati dallo scambio termico è un fluido, e la trasmissione del calore può essere associata ad un trasferimento di materia. In un fluido a temperatura non uniforme, per effetto combinato di un campo di temperatura e di velocità, si determina una distribuzione dei valori di densità variabile da punto a punto, conseguenza dei fenomeni di dilatazione termica. In questi casi le forze gravitazionali provocano continui movimenti delle particelle del fluido, con conseguente miscelazione, favorendo pertanto la trasmissione del calore dalle particelle più calde a quelle più fredde. Questo fenomeno prende il nome di *convezione naturale*. Quando invece i movimenti delle particelle del fluido sono imposti essenzialmente da cause meccaniche (una pompa, nel caso di circolazione dell'acqua, o semplicemente l'azione del vento), il fenomeno prende il nome di *convezione forzata*. Ad esempio si ha convezione quando tra due corpi circola un fluido intermedio (detto fluido termovettore), che si riscalda per conduzione a contatto con il corpo caldo, e poi cede il calore quando viene a contatto con il corpo freddo. In entrambi i casi, la quantità di calore scambiata è proporzionale alla differenza di temperatura.

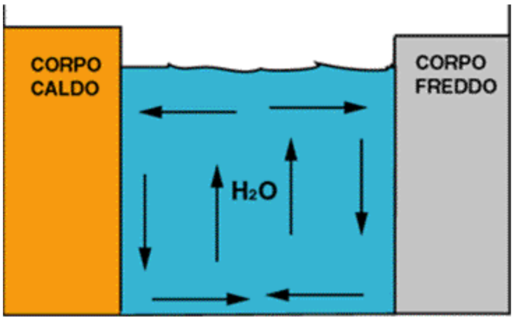

Fig. 2 moto molecolare nel mezzo convettivo (in questo caso acqua)

IRRAGGIAMENTO

Nell'irraggiamento il calore viene scambiato mediante emissione e assorbimento di radiazione elettromagnetica. Il calore così scambiato aumenta molto rapidamente con la differenza di temperatura.

A differenza delle altre due modalità di scambio termico, l'irraggiamento non richiede la presenza di un mezzo perché vi sia trasmissione di energia. La radiazione elettromagnetica che opera da "trasmettitore" di calore, è generata dall'eccitazione termica della superficie del corpo, a sua volta causata dallo stato energetico degli atomi che la costituiscono, ed è emessa in tutte le direzioni.

Quindi in questo caso il corpo avente temperatura maggiore emette radiazioni elettromagnetiche che vengono assorbite dal corpo più freddo, come si vede in figura 3 (nella figura sono rappresentate soltanto le radiazioni termiche che investono il corpo freddo).

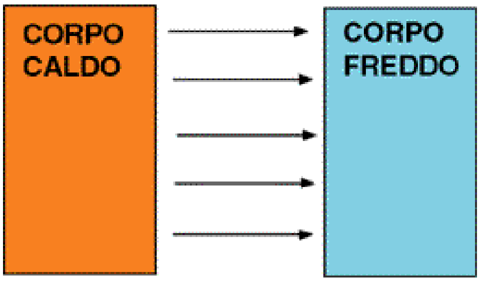

Fig. 3

PROCESSI DI TRASFERIMENTO DI CALORE COMBINATI

La conduzione è il solo metodo di trasmissione nei solidi, mentre nei liquidi è sempre accompagnata dalla convezione. Nei fluidi trasparenti il trasporto del calore avviene tramite irraggiamento e convezione, mentre nei fluidi densi l'irraggiamento è accompagnato dalla conduzione.

A seconda della natura dei corpi in gioco nel fenomeno di trasmissione del calore, assume un ruolo predominante una modalità rispetto alle altre, oppure il calore viene trasferito grazie all'azione combinata di due o di tutte e tre le modalità. Questo è causato dalle caratteristiche fisiche, ad esempio dalla densità del corpo oppure se questo è più o meno trasparente. Ad esempio il calore, dissipato attraverso le pareti interne di un edificio verso l'ambiente esterno, attraversa per conduzione i vari strati che costituiscono la parete e per convezione e irraggiamento gli spazi tra i mattoni occupati dall'aria. Una volta che il calore ha raggiunto l'ambiente esterno, esso è dissipato tramite convezione e irraggiamento. In un forno metallurgico, un metallo che viene portato ad un'alta temperatura, è soggetto all'azione combinata delle tre modalità. Il calore viene trasferito per conduzione attraverso la parte dell'oggetto che è a contatto con la superficie del forno, mentre le altre zone del metallo sono riscaldate per conduzione ed irraggiamento. Si nota che i tre meccanismi agiscono come se fossero in serie e in parallelo, e questa loro combinazione fornisce l'energia termica totale trasferita da un sistema all'altro.

Consideriamo, come mostrato in figura 4a, due corpi A e B a temperature diverse in una stanza contenente aria. Dal principio zero della termodinamica sappiamo che il calore passa spontaneamente dal corpo più caldo a quello freddo fino a che entrambi non hanno raggiunto la stessa temperatura. Il calore in questo caso è scambiato per convezione ed irraggiamento. Se fosse creato il vuoto nella stanza allora si avrebbe solo il fenomeno dell'irraggiamento, e di conseguenza sarebbe scambiata tra i due corpi una quantità minore di calore. Dopo un certo tempo, la potenza termica totale è data dalla somma della potenza scambiata per convezione e per irraggiamento:

$$\dot{Q}_{TOTALE} = \dot{Q}_{CONVEZIONE} + \dot{Q}_{IRRAGGIAMENTO} \qquad (1)$$

I due meccanismi di trasmissione agiscono in parallelo. Si può stabilire una analogia con i circuiti elettrici, e di conseguenza il fenomeno può essere descritto dal circuito in figura 4b.

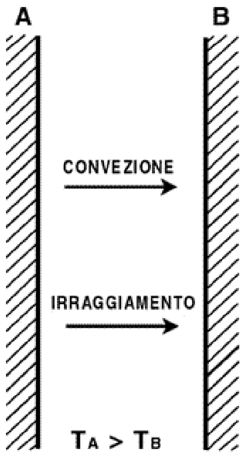

Fig.4a

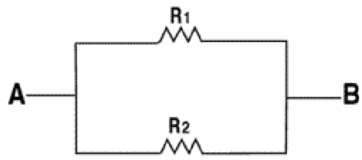

Fig.4b

Il flusso di corrente che circola nelle due resistenze $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$, che indicano rispettivamente le resistenze di convezione ed irraggiamento, si comporta in maniera del tutto analoga alla quantità di calore che fluisce per un certo periodo tra i due corpi a causa della convezione e l'irraggiamento. Infatti il flusso di corrente totale è dato dalla somma delle correnti che circolano nelle due resistenze, cosi come la potenza termica totale era data dalla somma delle potenze termiche scambiate dai singoli meccanismi di trasmissione: vedi equazione (1).

Ci sono altri casi in cui lo scambio termico può essere accostato ad un circuito elettrico avente resistenze in serie. Consideriamo a tale proposito una parete costituita da tre strati di materiale differente aventi le due superfici parallele A e B a temperature diverse, come mostrato in figura 5a.

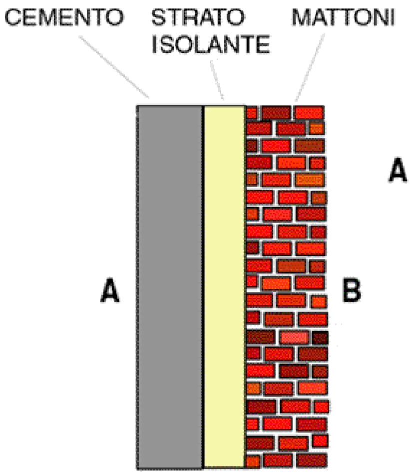

Fig. 5a (parete edile) *Fig.5b*

Il calore, che è scambiato unicamente per conduzione, fluisce dalla parete A alla B (**T_A** > **T_B**), e durante il suo cammino incontra tre materiali diversi. In questo caso non si ha un unico fenomeno di conduzione ma se ne hanno tre, uno per ogni materiale incontrato. Per analogia possiamo considerare i tre strati come tre resistenze poste in serie (figura 5b), in quanto la potenza termica totale non è la somma delle tre singole potenze ma segue la relazione:

$$\frac{1}{\dot{Q}_{TOTALE}} = \frac{1}{\dot{Q}_C} + \frac{1}{\dot{Q}_I} + \frac{1}{\dot{Q}_M} \qquad (2)$$

Rtot = Rc + Ri + Rm

dove $\dot{Q}_C$, $\dot{Q}_I$ e $\dot{Q}_M$ sono le potenze termiche trasmesse per conduzione rispettivamente attraverso il cemento, lo strato isolante e i mattoni.

Come si nota dalla (2) la potenza termica totale trasferita è minore di quella che fluirebbe singolarmente in ciascun materiale. I muri delle abitazioni sono costituti da più strati proprio per minimizzare il calore disperso attraverso essi.

Se al posto delle potenze termiche sostituiamo delle correnti, ciò che si ottiene è la corrente totale che scorre in un circuito costituto da tre resistenze in serie.

EQUIVALENTE TERMICO DELLA LEGGE DI OHM

Le considerazioni sulle analogie tra i fenomeni di scambio di calore circuiti elettrici, e in particolare l'esatta corrispondenza tra potenza termica e corrente elettrica, sono del tutto confermate dalla formulazione di una legge fisica chiamata **equivalente termico della Legge di Ohm**. Essa afferma che la quantità di calore scambiata nell'unità di tempo, ossia la potenza termica, è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura che causa lo scambio di calore. In simboli:

$$\Delta T = R_T \cdot \dot{Q} \qquad (3)$$

dove **ΔT** è la differenza di temperatura presente misurata in kelvin e **$\dot{Q}$** è la potenza termica.

Con il simbolo **R_T** si è indicata la resistenza termica, la cui definizione segue direttamente dalla (3):

$$R_T = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} \qquad (4a) \qquad\qquad [R_T] = \frac{[K]}{[W]} \qquad (4b)$$

La resistenza termica, a differenza di quella elettrica che possiede una propria unità di misura nel Sistema Internazionale detta Ohm (1**Ω**=1**V**/1**A**), come mostrato nella (4b), si misura in $[K]\cdot[W]^{-1}$. Essa svolge nei confronti del flusso termico e della differenza di temperatura, il medesimo ruolo che la resistenza elettrica ha nei confronti rispettivamente della corrente e della differenza di potenziale.

Per fissare le idee sull'analogia tra fenomeni di scambio di calore e circuiti elettrici, nella tabella 1 sono state accostate le loro grandezze fisiche e le due leggi che le legano:

Processi di scambio di calore	**Elementi elettrici**
Equivalente termico legge di Ohm $\Delta T = R_T \cdot \dot{Q}$	Legge di Ohm $\Delta V = R \cdot I$
Potenza termica ($\dot{\mathbf{Q}}$) (Watt)	Corrente (**I**) (Ampere)
Differenza di temperatura (ΔT) (K)	Caduta di tensione (**ΔV**) (Volt)
Resistenza termica ($\mathbf{R_T}$) (K/W)	Resistenza elettrica (**R**) (Ohm)

tab. 1- Analogie tra elementi elettrici e processi di scambio di calore.

La legge di Ohm, sia nel caso termico che in quello elettrico è una legge di causa-effetto. La differenza di temperature (causa) provoca un flusso di calore (effetto), cosi come la differenza di potenziale fa circolare corrente elettrica.

Essa è matematicamente verificata se c'è proporzionalità lineare tra differenza di temperatura e potenza termica, detto in altri termini se la resistenza termica può essere ritenuta costante. Ma, essendo $\mathbf{R_T}$ una grandezza fisica che dipende fortemente dalla temperatura, essa è variabile.

Tuttavia se si ha a che fare con problemi di scambio termico nei quali fissiamo la temperatura iniziale e finale, possiamo ritenere costante la resistenza termica. In queste condizioni è valida la sovrapposizione degli effetti, cioè se ad esempio la conduzione avviene attraverso più strati di materiale differente, la potenza termica totale è data dalla (2). Questi sono casi in cui si dice che si opera a *temperatura imposta*.

Se al contrario lavoriamo a *flusso imposto*, cioè sappiamo quanta potenza termica è scambiata, non è più valida la sovrapposizione degli effetti e la resistenza termica non è più costante poiché non sappiamo come varia la temperatura.Questo tipo di problema rappresenta la maggior parte degli esercizi di Termocinetica. Essi si risolvono per tentativi. L'unico dato che il problema fornisce è la quantità di calore scambiata e viene chiesto a che temperatura avviane lo scambio. Arbitrariamente assegniamo un valore alla temperatura incognita. Con questo valore calcoliamo la resistenza termica corrispondente. Con la resistenza termica e la quantità di calore fornita come dato ricaviamo la temperatura. Si verifica se essa è simile al valore di tentativo; se non è così, ripetiamo tutto il procedimento, stavolta però utilizzando il valore della temperatura che abbiamo calcolato. Ci fermeremo quando la temperatura si è stabilizza attorno ad un certo valore.

CONDUZIONE

Approfondiamo ora il nostro studio sulla conduzione, enunciando le relazioni matematiche che la regolano.

I processi di scambio termico tramite conduzione sono generalmente classificati in:

- Processi stazionari
- Processi non stazionari o transitori

I primi hanno la caratteristica che tutte le grandezze fisiche (temperatura, pressione, etc.) in ogni punto della regione dove si ha conduzione sono indipendenti dal tempo; al contrario i processi transitori implicano variazioni temporali che il più delle volte interessano la temperatura. Inoltre la legge che descrivere i processi stazionari, non è valida per quelli transienti. Per quest'ultimi, come vedremo in seguito, useremo delle relazioni opportune.

LEGGE DI FOURIER

Prima di enunciare la legge illustriamo le grandezze fisiche in gioco in un processo di scambio di calore per conduzione.

La quantità di calore trasmessa nell'unità di tempo per conduzione attraverso un materiale solido, o equivalentemente attraverso un fluido in quiete, è chiamata potenza termica e si indica con $\dot{\mathbf{Q}}$. Nel sistema internazionale essa si misura in watt. Ricordiamo che il calore, essendo una forma di energia, si esprime in joule e che 1watt=1joule/1secondo.

Si definisce **densità di flusso termico** $\dot{q}$ la potenza termica per unità di superficie. Le sue dimensioni, nel Sistema Internazionale, sono quelle di una quantità di calore per unità di superficie. In simboli

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} \qquad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad (5)$$

Essa è sostanzialmente l'intensità ***I*** definita in Acustica. Successivamente, studiando il fenomeno dell'irraggiamento, indicheremo con ancora con ***I*** l' Intensità di irraggiamento, che è la grandezza analoga alla densità di flusso termico.

Possiamo ora enunciare la **legge di Fourier**:

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{grad(T)} \qquad (6)$$

Essa esprime la proporzionalità tra la densità di flusso di calore $\dot{q}$ e il gradiente di temperatura, dove:

- grad ( ), indicato anche con ∇ (nabla), è un operatore vettoriale che trasforma una funzione delle coordinate di un punto in un vettore le cui componenti cartesiane sono le derivate parziali della funzione in quel punto.

- **T(x,y,z,τ)** rappresenta il campo scalare delle temperature all'interno di un volume **V** di un corpo dove avviene conduzione; questo campo è variabile sia nello spazio che nel tempo. La sua derivata spaziale rappresenta un vettore che in ogni punto è diretto verso le temperature crescenti. Il vettore gradiente è così perpendicolare alle superfici isoterme, orientato nel verso dell'isoterma maggiore. Il suo modulo è proporzionale ala velocità di variazione della temperatura nello spazio: quanto più le isoterme sono fra loro vicine, tanto più alto sarà il gradiente e quindi, per la legge di Fourier, tanto più grande sarà lo scambio termico. Nell'equazione (6) compare il segno meno perché il verso del vettore gradiente è quello delle temperature crescenti, mentre il vettore densità di calore ha verso concorde con quello delle temperature decrescenti (il calore va dai corpi a temperatura più alta a quelli a temperatura più bassa).

Quella appena considerata è un'equazione vettoriale, per cui sia $\dot{q}$ che il gradiente sono due vettori, di solito con la stessa direzione, per cui ci interessa per lo più valutarne il modulo.

La proporzionalità tra densità di flusso termico e gradiente di temperatura, è espressa dal termine **λ** che prende il nome di **conducibilità termica**. Quest'ultima, che non è grandezza vettoriale, è caratteristica del materiale conducente il calore e dipende dalla sua natura e dal suo stato fisico. Dalla legge di Fourier ricaviamo che **λ**, nel Sistema Internazionale, si misura in $[W]\cdot[m]^{-1}\cdot[k]^{-1}$.

Tramite i valori della conducibilità termica è possibile classificare i materiali tra *isolanti termici*, che hanno solitamente **λ**<1, e *conduttori termici*. Sono detti isolanti quei materiali che ostacolano il passaggio del flusso termico. L'isolante migliore è l'aria, che ha $\boldsymbol{\lambda_{aria}}$=0.024 W/m K. La lana di vetro, pur avendo un λ non troppo piccolo è utilizzato come isolante. Questo materiale ha la proprietà di trattenere nel suo interno aria, che funge da isolante. I conduttori migliori sono i metalli e le loro leghe, ad esempio il rame ha $\boldsymbol{\lambda_{Cu}}$=395 W/m K e l'alluminio $\boldsymbol{\lambda_{Al}}$=210 W/m K.

Per una lista completa con molti valori di conducibilità termica per diversi materiali si veda la tabella A in appendice.

La conducibilità termica per un dato materiale dipende dal suo stato fisico e può variare con la pressione e la temperatura. Mentre nella maggior parte dei casi, l'effetto della pressione è trascurabile, **λ** è sempre funzione della temperatura, e varia linearmente con essa.

Ad esempio, al crescere della temperatura, alcuni materiali isolanti aumentano la loro conducibilità, mentre certi conduttori, a causa della rottura dei legami cristallini perdono proprietà di condurre calore. La legge di Fourier è valida anche in queste condizioni; risulta soltanto di più difficile applicazione. In questo caso, per risolvere un problema di scambio di calore, che ha come incognite le temperature, dobbiamo iterare la soluzione. Dobbiamo cioè procedere per tentativi assegnando valori arbitrari della temperatura, con i quali ricaviamo le relative **λ** dalle tabelle come quella in appendice. Risolviamo poi il problema con questi dati , calcoliamo le temperature e le confrontiamo con quelle da noi assegnate arbitrariamente. Se sono uguali allora quella è la soluzione. In caso contrario ripetiamo il procedimento fino a che il risultato non si è stabilizzato.

La dipendenza della conducibilità dalla temperatura è una funzione lineare:

$$\lambda = \lambda_0 + B \cdot T \quad (7)$$

$\boldsymbol{\lambda_0}$ è la conducibilità a t=0°C e B è la variazione di $\boldsymbol{\lambda_0}$ per grado centigrado. Normalmente B è trascurabile rispetto a $\boldsymbol{\lambda_0}$ cosicché **λ** risulta essere costante e siamo autorizzati ad omettere la sua dipendenza dalla temperatura. Questa approssimazione è del tutto lecita nei problemi pratici: infatti la termocinetica è una scienza inesatta, in quanto si commettono errori anche del 20-30%.

EQUAZIONE DI FOURIER

La legge di Fourier è utilizzata nei problemi di trasmissione del calore per trovare un'espressione che descrive il campo termico in corpo. Tale legge però è valida solo nell'ipotesi di operare in un campo termico in regime stazionario. Questo significa che la temperatura rimane costante nel tempo. Mentre se essa varia, se in altre parole analizziamo un campo in regime transitorio, la legge di Fourier non descrive correttamente il processo. Partendo da questa legge, è stata ricavata un'equazione differenziale di secondo grado, detta **equazione di Fourier**, che fornisce una descrizione completa dell'evoluzione della temperatura in funzione del tempo. Equivalentemente avevamo in acustica la legge di Eulero, da cui si costruisce l'equazione di D'Alambert, e nel moto dei fluidi la legge di Newton, che sta alla base dell'equazione di Navier. Mentre nei casi citati, il passaggio dalla legge fisica all'equazione non aveva sviluppi pratici, nel caso dello scambio termico passare dalla legge fisica alla relativa equazione di Fourier può avere una qualche utilità pratica, perché i problemi di scambio termico per conduzione si risolvono tramite integrazione numerica dell'equazione di Fourier.

Come la maggior parte delle equazioni fisiche, l'equazione di Fourier è una equazione differenziale e come tale fornisce una soluzione generica; essa necessita dell'imposizione delle cosiddette *condizioni al contorno* affinché possa applicarsi al caso che stiamo trattando.

Le condizioni al contorno sono di due tipi: spaziali e temporali.

Spesso le condizioni al contorno sono di temperature imposte, cioè si devono risolvere problemi nei quali è stata fissata la temperatura. In questo caso le condizioni al contorno sono dette di *tipo* ***T***.

Esiste un'altra categoria di problemi nei quali invece è fissata la quantità di calore scambiata nel tempo. Avremo allora condizioni di *tipo* ***Q***.

METODO PER RICAVARE L'EQUAZIONE DI FOURIER

Partendo da un caso particolare (l'esempio sotto descritto), ricaviamo l'equazione generale che regola i processi di conduzione, chiamata equazione di Fourier.

Consideriamo una lastra di spessore costante L che abbia larghezza e lunghezza tanto grandi da potere essere considerate infinite, vedi figura 6. In queste condizioni, la lastra rappresenta un sistema monodimensionale dipendente dalla sola variabile x se questa è inserita in un opportuno sistema di riferimento cartesiano. Supponiamo che le pareti siano rispettivamente alla temperatura $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$.

Consideriamo un elemento della lastra di superficie A=1 m^2 e spessore dx (nella figura 6 è rappresentato dal rettangolo grigio). Inoltre supponiamo che la parete sia costituita da un materiale avente densità volumetrica pari a $\boldsymbol{\rho}$ e assumiamo che $\boldsymbol{\lambda}$, la sua conducibilità termica, sia costante.

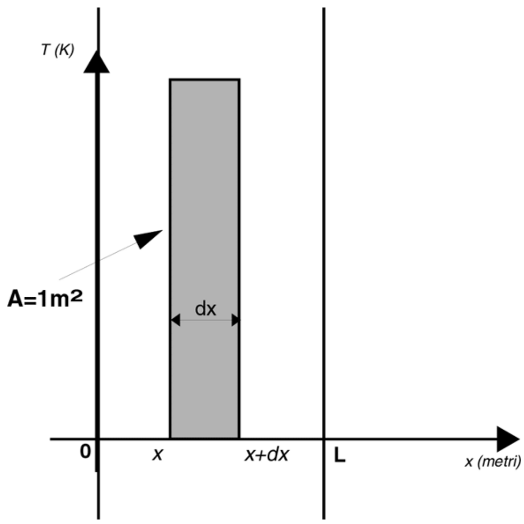

Fig.6 Lastra indefinita

Il volume dell'elemento grigio evidenziato in figura è:

$$dV = A \cdot dx \qquad (8)$$

La massa di tale volume, conoscendo la densità volumetrica è:

$$dM = \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot dx \qquad (9)$$

Supponiamo che al tempo $\boldsymbol{\tau=\tau_0}$ il sistema sia alla temperatura $T(x,\tau_0)$; il campo delle temperature è dipendente dal tempo, quindi dopo una frazione di tempo $d\tau$ la temperatura del sistema vale $T(x,\tau_0+d\tau)=T(x,\tau_0)+\frac{\partial T}{\partial \tau}d\tau$

Sinteticamente:

$T_x = T(x,\tau_0)$

$T_{x+dx} = T(x,\tau_0+d\tau)=T(x,\tau_0)+\frac{\partial T}{\partial \tau}d\tau$

Cioè gli istanti temporali τ_0 e $\tau_0+d\tau$ e le corrispondenti temperature $T(x,\tau_0)$ e $T(x,\tau_0+d\tau)$, sono associate rispettivamente alle ascisse x e $x+dx$. In altre parole $d\tau$ è la frazione di tempo che il calore impiega a percorre il tratto dx, indicato in figura 6.

Possiamo fare un bilancio dell'energia che entra all'ascissa x e di quella che esce all'ascissa $x+dx$, cioè attraverso lo spessore dx della lastra, utilizzando il primo principio della termodinamica:

$$\Delta U = Q \qquad (10)$$

dove chiaramente Q non è la potenza termica ma è la somma della quantità di calore che entra in x e di quello che esce in corrispondenza di $x+dx$.

Abbiamo trascurato il temine relativo al lavoro, in quanto si tratta di un problema di pura conduzione che, nella maggior parte dei casi avviane attraverso corpi solidi; possiamo quindi trascurare eventuali deformazioni dovute alla compressione o alla dilatazione. In poche parole il volume è costante e di conseguenza il lavoro è nullo.

Per esprimere la (10) in termini di densità di flusso termico dobbiamo moltiplicare il secondo membro per $d\tau$, che rappresenta il tempo necessario affinché il calore fluisca nello spessore considerato. Otteniamo quindi:

$$\Delta U = A \cdot (\dot{q}_x - \dot{q}_{x+dx}) \cdot d\tau \qquad (11)$$

Scrivendo l'energia ΔU in un funzione della differenza di temperatura dT :

$$dM \cdot c \cdot dT = A \cdot (\dot{q}_x - \dot{q}_{x+dx}) \cdot d\tau \qquad (12)$$

dove $\boldsymbol{c}$ rappresenta il calore specifico del materiale (per un solido $c_p \cong c_v$,cioè il calore specifico a pressione e a volume costanti sono equivalenti).

Sostituendo la (9) nella (12) si ha:

$$\rho \cdot A \cdot dx \cdot c \cdot dT = A \cdot (\dot{q}_x - \dot{q}_{x+dx}) \cdot d\tau \qquad (13)$$

Utilizziamo ora la legge di Fourier, espressa dalla relazione

$$\vec{\dot{q}} = -\lambda \overrightarrow{grad(T)} \qquad (6)$$

per scrivere in altro modo le densità di flusso termico che appaiano nel secondo membro della (13) e applichiamo il gradiente ottenendo così:

$$\begin{cases} \dot{q}_x = -\lambda grad(T_x) \\ \dot{q}_{x+dx} = -\lambda grad(T_{x+dx}) = -\lambda gradT_x - dx \cdot grad(\dfrac{\partial T}{\partial x}) \end{cases} \qquad (14)$$

Risolvendo il sistema si ha:

$$\rho \cdot A \cdot dx \cdot c \cdot dT = A \cdot dx \cdot \lambda \cdot grad(\frac{\partial T}{\partial x}) \qquad (15)$$

semplificando:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{dT}{d\tau} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (16)$$

La (16) è **l'equazione di Fourier**.
Scritta nella forma più generale, ossia in tre dimensioni:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \qquad (17a)$$

oppure,espressa sinteticamente tramite l'operatore ∇^2 (nabla quadro):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \nabla^2 T \qquad (17b)$$

L'equazione nella forma generale, si applica quando si ha a che fare con una trasmissione di calore per conduzione in regime transiente che avviene in tre dimensioni.

Mentre se siamo in regime stazionario, cade la dipendenza dal tempo cosicché la derivata rispetto a grandezza è nulla. L'equazione che risulta è chiamata **equazione di Laplace**:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad (18)$$

Ipotizzando che il caso trattato finora (figura 6) si svolga in regime stazionario, la (16) diventa:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad (19)$$

Integriamo la (19) due volte, ottenendo:

$$T(x) = Ax + B \qquad (20)$$

le costanti A e B si ricavano dalle condizioni al contorno:

x=0 *T(0)=T_1*
x=L *T(L)=T_2*

combinandole con la (20) troviamo le temperature $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$:

$$\begin{cases} T(0) = T_1 \\ T(L) = T_2 \end{cases} \quad \begin{cases} T(0) = B \\ T(L) = AL + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = B \\ T_2 = AL + B \end{cases} \qquad (21)$$

Esprimiamo le costanti A e B in funzione di $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$:

$$\begin{cases} A = \dfrac{T_2 - T_1}{L} \\ B = T_1 \end{cases} \qquad (22)$$

Possiamo ora riscrivere l'equazione (20), che rappresenta il profilo di temperatura entro la parete, utilizzando la (22):

$$T(x) = T_1 + \frac{x}{L}(T_2 - T_1) \qquad (23)$$

La (23) è indicata con il nome **profilo di temperatura** e rappresenta la legge di variazione spaziale della grandezza suddetta.

Nel caso sopra descritto, *x* è l'unica coordinata spaziale che descrive il sistema. Perciò se scriviamo il modulo della densità del flusso di calore, il gradiente risulta essere la sola derivata parziale rispetto alla coordinata *x*, cioè:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot grad(T) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (24)$$

Infine sostituendo la (23) nella (24) otteniamo:

$$\dot{q} = \frac{\lambda}{L} \cdot (T_1 - T_2) \qquad (25)$$

La (25) rappresenta la densità di flusso termico che scorre attraverso la lastra di spessore L.

APPLICAZIONI

ESERCIZIO 1

Calcolare la potenza termica dispersa, causata dal calore che fuoriesce dall'interno di un edificio, attraverso una parete di gesso spessa 5cm e avente una superficie di 10 m^2, sapendo che la temperatura all'interno e all'esterno valgono rispettivamente 20°C e 0°C.

A=10 m^2
L=5 cm=0,05m
T_1*=20°C*
T_2*=0°C*

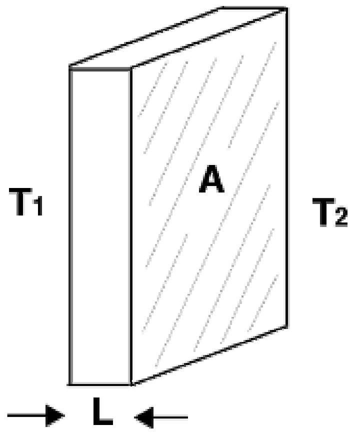

Fig.7 Elemento della parete di gesso

Ricaviamo il valore della conducibilità termica del gesso dalla tabella A in appendice, supponendo che **λ** sia indipendente dalla temperatura. Troviamo:
λ=0,5 W/m K .

Le temperature sono espresse in gradi Celsius. Per applicare correttamente, dal punto di vista dimensionale, la legge di Fourier dovremo convertire le temperature nella scala assoluta. Tale operazione è del tutto inutile poiché nei problemi di trasmissione del calore compaiono soltanto differenze di temperature. E' quindi del tutto indifferente usare le temperature assolute o quelle centigrade.

Calcoliamo il modulo della densità di calore utilizzando la (25):

$$\dot{q} = \frac{\lambda}{L} \cdot (T_1 - T_2) = \frac{0,5}{0,05} \cdot 20 = 200 \, {W}/{m^2}$$

Chiaramente il flusso di calore è diretto verso l'esterno, essendo questo a temperatura minore.

Dalla (5) otteniamo la potenza termica:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot A = 200 \cdot 10 = 2000W$$

ESERCIZIO 2

Affianchiamo una parete, avente conducibilità λ_2=1,5 W/m K, a quella di gesso dell'esercizio 1. I dati del problema sono:

A=10 m²

$A=10\ m^2$

$L_1=5\ cm=0{,}05m$

$L_2=10\ cm=0{,}10m$

$\lambda_1=0{,}5\ W/m\ K$

$\lambda_2=1{,}5\ W/m\ K$

$$\begin{cases} T_1 = 20°C \\ T_2 = 0°C \end{cases} \Rightarrow \Delta T = 20$$

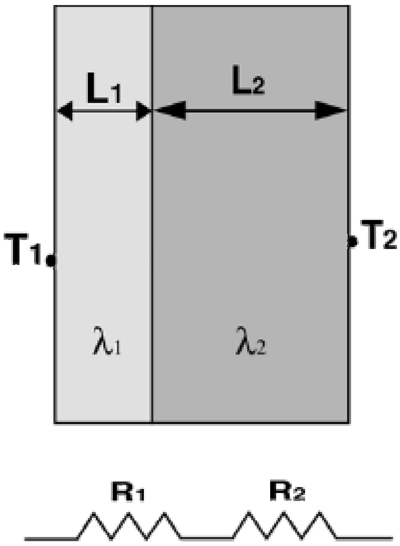

Fig.8

Possiamo risolvere un problema di questo tipo nel modo canonico, utilizzando l'equazione di Fourier. Tale metodo risulta complicato, data la presenza di calcoli dovuti all'integrazione dell'equazione di Fourier.

Una soluzione più immediata si ottiene sfruttando il concetto di resistenza termica.Vedo i due strati di materiale diverso come due resistenze poste in serie.

Ricordando la (4a), che fornisce l'espressione della resistenza termica:

$$R_T = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} \qquad (4a) \qquad \text{e poiché} \qquad \begin{cases} \dot{Q} = \dot{q} \cdot A \\ \dot{q} = \frac{\lambda}{L} \cdot (T_1 - T_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad R_T = \frac{L}{A \cdot \lambda} \qquad (E1.1)$$

Calcoliamo, usando la (E1.1), i valori delle due resistenze termiche ottenendo:

$$R_1 = \frac{L_1}{A \cdot \lambda_1} = \frac{0{,}05}{10 \cdot 0{,}5} = \frac{1}{100} \frac{K}{W}$$

$$R_2 = \frac{L_2}{A \cdot \lambda_2} = \frac{0{,}10}{10 \cdot 1{,}5} = \frac{1}{150}\frac{K}{W}$$

Essendo R_1 e R_2 in serie la resistenza equivalente è:

$$R_{EQ} = R_1 + R_2 = \frac{1}{100} + \frac{1}{150} = \frac{5}{300} = 0{,}017W$$

A questo punto calcolo la potenza termica totale scambiata dal sistema, che è data da:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{EQ}} = 20 \cdot \frac{300}{5} = 1200W$$

Notiamo come la potenza termica dissipata sia inferiore (800W in meno) rispetto a quella persa in assenza dello strato aggiuntivo. Ciò significa che il sistema costituito dalle due lastre fornisce un isolamento termico migliore rispetto a quello costituito dalla singola parete. Questo perché aumenta la resistenza termica che migliora la qualità dell'isolamento.

CASO GENERALE

Se anziché due strati di materiale, come in figura 8, una parete è formata da N strati, la potenza termica totale dissipata è data:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\ldots + R_N} = A \cdot \frac{\Delta T}{\frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{L_3}{\lambda_3} + \ldots\ldots + \frac{L_N}{\lambda_N}}$$

dove:

- **A** è la superficie della parete
- L_i e $\boldsymbol{\lambda_i}$ (con i=1,2,3,….,N) sono rispettivamente gli spessori e le conducibiltà termiche delle lastre
- $\mathbf{R_i}$ (con i=1,2,3,….,N) sono le resistenze termiche associate ad ogni strato
- **ΔT** è la differenza di temperatura

<u>ESERCIZIO 3</u>

Consideriamo i dati dell'esercizio 2. Questa volta l'esercizio chiede di calcolare la temperatura, indicata in figura 9b con $\mathbf{T_c}$, che si ha nel punto di contatto tra le due lastre.

Esistono molti procedimenti di risoluzione ma quello più immediato è sfruttare nuovamente l'analogia con i circuiti elettrici. La grandezza elettrica analoga alla temperatura è, come abbiamo già detto in precedenza, la tensione. Quindi ragionando come se le temperature fossero tensioni, calcoliamo la temperatura nel punto intermedio usando il partitore di "temperatura" (cosi come nei circuiti elettrici si usa il partitore di tensione).

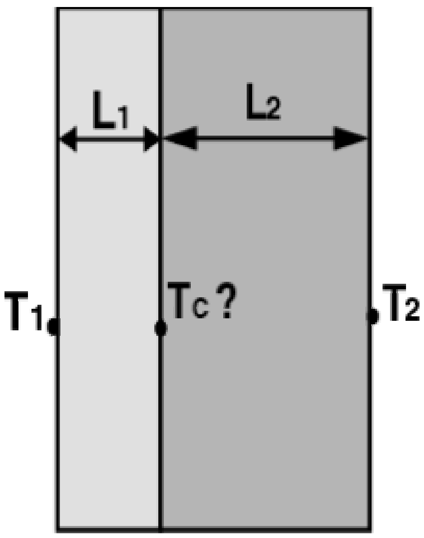

Fig.9a

A=10 m²
L_1=5 cm=0,05m
L_2=10 cm=0,10m
λ_1=0,5 W/m K
λ_2=1,5 W/m K
T_1=20°C
T_2=0°C
T_C = ?

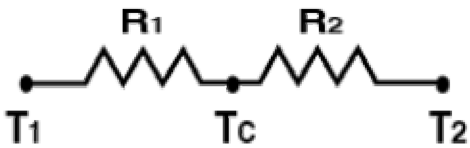

Fig.9b

Applicando questo ragionamento troviamo:

$$\dot{q} = \frac{\lambda_1}{L_1} \cdot (T_1 - T_C) \qquad \text{(E3.1)}$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_2}{L_2} \cdot (T_C - T_2) \qquad \text{(E3.2)}$$

Poiché la (E3.1) e la (E3.2) rappresentano la stessa quantità:

$$\frac{\lambda_1}{L_1} \cdot (T_1 - T_C) = \frac{\lambda_2}{L_2} \cdot (T_C - T_2) \qquad \text{(E3.3)}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{L_1} \cdot T_1 + \frac{\lambda_2}{L_2} \cdot T_2 = T_C \cdot \left(\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}\right) \qquad \text{(E3.4)}$$

ricaviamo $\mathbf{T_c}$:

$$T_C = \frac{\frac{\lambda_1}{L_1} \cdot T_1 + \frac{\lambda_2}{L_2} \cdot T_2}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}} = \frac{\frac{0,5}{0,05} \cdot 20 + \frac{1,5}{0,10} \cdot 0}{\frac{0,5}{0,05} + \frac{1,5}{0,10}} = 8°C$$

Inseriamo la parete in un sistema d'assi coordinati (figura 10). Le ascisse rappresentano lo spessore delle lastre 1 e 2 costituenti la parete, le ordinate l'evolversi della temperatura all'interno della parete.

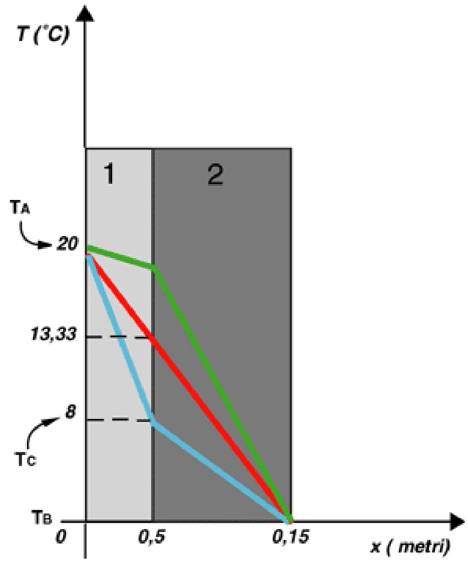

Fig.10

Quest'ultima varia linearmente all'interno delle singole lastre, mentre non varia altrettanto se consideriamo la parete nella sua totalità. Anzi si osserva che se avessimo considerato lineare l'evolversi della temperatura, avremmo commesso un errore nella misura di circa 5°C nel punto di contatto tra le due lastre. La linea rossa in figura non da perciò una corretta lettura del fenomeno.

Notiamo che la caduta di temperatura più marcata si ha nello strato 1 perché $\lambda_1 < \lambda_2$ (linea azzurra). Di conseguenza questo si comporta da isolante. E' questo il caso di un *isolamento interno*.

Se invece $\lambda_2 < \lambda_1$ (linea verde)., cioè si dice che siamo in presenza di un *isolamento esterno*, si ha una caduta di temperatura più accentuata nello strato 2

APPENDICE

<u>TABELLA A</u>

MATERIALE	Conducibilità termica a 20° C (W/mK)
Acciaio con 5% Ni	29
Acciaio con 30% Ni	105
Acqua (liquida in quiete a 20°C)	0,63
Acqua pesante 10 ÷ 100°C	0,56 ÷ 0,65
Alcool	0,21
Alluminio	210
Aria (in quiete a 20°C)	0,026
Argentana	27
Argento	420
Asfalto	0,64
Basalto	1,27 ÷ 3,5
Bronzo	58 ÷ 65
Carbone	0,14 ÷ 0,17
Carbone di storta	4
Carbone in polvere	0,12
Cartone	0,14 ÷ 0,23
Cartongesso in lastre	0,21
Caucciù	0,13 ÷ 0,23
Celluloide	0,35
Cellulosa compressa	0,24
Cemento in polvere	0,070
Cenere	0,069
Creta	0,90
Duralluminio	160
Ferro elettrolitico	87
Ferro ed acciaio	46,5/58
Gesso	0,5
Ghiaccio	2,20/2,50
Ghisa	50
Glicerina	0,220
Grafite	4,9
Granito	3,18 ÷ 4,10
Incrostazioni di caldaia	1,16 ÷ 3,49
Intonaco di calce e gesso	0,70
Legno asciutto ⊥ alle fibre di abete e pino	0,10 ÷ 0,12
Legno asciutto ⊥ alle fibre di quercia	0,18
Legno asciutto parallelamente alle fibre	0,15 ÷ 0,27
Linoleum	0,18
Manganina	23
Marmo	2,1 ÷ 3,5
Mercurio liquido a 0° C	8,13
Mercurio liquido a 60° C	9,64

Mercurio liquido a 120° C	10,92
Mercurio liquido a 160° C	11,6
Mercurio liquido a 222° C	12,78
Mica	0,39
Muratura di pietrame	1,40 ÷ 2,40
Muratura refrattaria (dinas, schamotte, silica) 200° C	0,70 ÷ 0,90
Muratura refrattaria (dinas, schamotte, silica) 1000° C	1,2 ÷ 1,4
Naftalina	0,37
Neve (appena caduta e per strati fino a 3 cm)	0,06
Neve (soffice, strati da 3 a 7 cm)	0,12
Neve (moderatamente compatta, strati da 7 a 10 cm)	0,23
Neve (compatta, strati da 20 a 40 cm)	0,70
Nichel	58 ÷ 65
Oli e petroli	0,12 ÷ 0,17
Oro	299
Ottone	70 ÷ 116
Pietra arenaria	1,30 ÷ 1,75
Pietra calcare compatta	0,70
Pietra calcare granulosa	0,95
Piombo solido	35
Pb 44,5% + Bi 55,5% (lega liq.) 160 ÷ 320° C	9,2 ÷ 11,3
Platino	70
Porcellana	0,80 ÷ 1,05
Quarzo ⊥ all’asse	6,60
Quarzo parallelo all’asse	12,80
Quarzo oggetti fusi	1,4 ÷ 1,9
Rame (8300 Kg/m^3)	302
Rame (8900 Kg/m^3)	395
Sabbia asciutta	0,35
Sabbia con 7% di umidità	1,16
Sodio solido	125,60
Sodio liquido 100 ÷ 500° C	86 ÷ 67
Na 56% + K 44% (lega Na, K liq.) 100 ÷500°C	27
Stagno	64
Steatite	2,7
Sughero (200 Kg/m^3)	0,052
Vetro	0,5 ÷ 1
Wood (lega)	12,78
Zinco	110
Zolfo	0,23